理论力学（第二版）
金尚年
出版社：高等教育出版社
出版日期：2002 年7月
ISBN：704010808

第一版前言

经典力学的基础是由伽利略、牛顿建立的. 牛顿总结了以前许多科学家的成就，于 1687 年在他的名著《自然哲学的数学原理》中，定义了质量、时间、空间、力等力学的基本概念，发表了著名的力学运动三大定律，创立了力学体系的第一种形式——牛顿力学体系. 牛顿力学与人们的感性经验密切联系，直观形象而易于被人们所理解和采纳. 但牛顿力学几乎都以力 $\boldsymbol{F}$ 为基础，因此它的应用只局限于纯力学问题的范畴，运算也较繁琐. 18 世纪伯努利、达朗贝尔、欧勒、拉格朗日等人先后发展了经典力学的分析形式，这是力学史上的一个新的里程碑. 拉格朗日于 1788 年发表的名著《分析力学》对此作了全面的总结，从此建立了经典力学的拉格朗日形式. 它用体系的动能和势能取代了牛顿形式的加速度和力，运算也相应地简化得多，并且由于能量对任何物理体系都有意义，因此力学的研究和应用范围也相应地开拓到整个物理学. 19 世纪 30 年代，哈密顿又推广了分析力学，将力学体系的变量从空间坐标扩大到相应的动量，这就使力学理论完全适应整个物理学发展的要求，而且还为量子力学的建立准备了理论条件.

经典力学的牛顿形式在大学普通物理课程中已有许多阐述、本书不拟重复，重点将放在经典力学的拉格朗日形式和哈密顿形式上. 作者认为读者已经基本掌握以下内容：① 牛顿力学的一些最基本的概念，如时间、空间、参考系、质量、力、转动惯量、力矩、动量、能量、角动量等；② 牛顿运动定律及各种常见力的性质；③ 质点的直线和圆周运动. 本书对这些内容不作专门讨论.

本书是在我校物理系多年使用的理论力学讲义的基础上修改而成的. 和传统教材相比，本书有以下一些特点：

(1) 改变了原来先牛顿力学后分析力学、先运动学后动力学、先质点后质点系的体系，采取了以分析力学为主体，运动学和相应的动力学问题紧密结合、单质点合并到质点系中一起叙述的体系. 这样做的好处是：学生一开始就感到这是一门和普物力学在内容和方法上有明显不同的新课，从而增加学习兴趣，并节省了讲授学时.

(2) 充实了物理内容. 本书在前两章叙述了经典力学的牛顿形式和拉格朗日形式的基本理论后，第三到第八章专门讨论在物理上有重要应用的典型力学问题的处理方法，使学生具体认识到不仅在工程技术问题中，而且在纯物理领域也有许多实际的力学问题，经典力学理论则是解决这些实际力学问题不可缺少

的工具.既使学生学得实在,又有利于培养他们的分析问题和解决问题的能力.

(3)减少了学生做习题的困难.理论力学解题困难的原因是多方面的,其中之一是和教材的体系有关.由于本书的以上两个特点,使学生随着课程的进展,熟悉了既可以用牛顿力学方程、又可以用拉格朗日方程来解题,哪一种方法方便就用哪种方法.并且由于有两种方法可供选择,自然就有利于学得生动活泼.

(4)注意了同后继课程的联系和衔接,因为为后继课程服务也是本课程的一大任务,凡是后继课程要用到的经典力学知识,几乎都讲述到可以直接引用的地步.如经典散射、微振动、电磁场的拉格朗日方程、刘维尔方程、经典微扰理论等都是这样要求的.

本书虽然是在多次使用的讲义的基础上编写而成的,但错误在所难免,欢迎读者指正.

在编写过程中曾得到陆全康、曾心愉、徐炳若等同志的帮助,在此表示衷心感谢.

金尚年

1985年5月

第二版前言

“理论力学”这门课程顾名思义是讲力学的基本理论．力学是大家所熟悉的一门学科，在中学物理课和大学普通物理课中都有力学的内容，现在是第三次学习力学课了．“理论力学”和以前所学的力学课，在内容和性质上有什么差别呢？这是大家所关心的问题，需要先作些说明．经典力学有三种不同的理论形式：牛顿力学、拉格朗日方程和哈密顿理论，后两者合称为分析力学．前两轮力学课的内容仅限于牛顿力学的形式，从未涉及分析力学的理论．本书的重点放在分析力学上，但仍要从牛顿力学讲起，并且篇幅不小．一方面是因为分析力学是以牛顿力学为基础的．另一方面以前所讲的牛顿力学基本上只限于单质点的直线运动和圆周运动，以及刚体的定轴转动；对于质点、质点系的一般运动和刚体定点转动还没有讨论过．现在要讨论这些问题．所以“理论力学”与前两轮力学课在内容上并不存在重复的问题．在性质上“理论力学”与前两轮力学课更有重要的差别．大学本科物理类专业的教学计划中有一组称为中级理论物理的课程，它们是：理论力学、数学物理方法、热力学与统计物理、电动力学和量子力学．这一组课程在性质上是类似的，在内容上是逐步拓展和深化的．理论力学是这一组课程中的第一门课．中级理论物理课与普通物理课比较，除了在内容上深一个层次以外，在认识论和方法论上有显著的差别．普通物理课基本上是从物理现象出发，通过分析归纳的方法，得出物质运动的经验规律，强调的是从感性到理性的认识过程．理论物理则是从物理学的经验规律出发，创建一个理性的物理世界，然后通过逻辑演绎的方法，推理出这个理性世界所应该具有的各种各样的性质，再与现实的经验事实作比较，以检验其真伪，并探讨其实际应用的可能性，重点在于培养学生的理性思维能力．可以这样说，“理论力学”是读者所遇到的第一门侧重于培养理性思维能力的物理课．所以无论就课程的内容还是课程的性质来说，“理论力学”都是一门全新的课程．

本书的基本内容在复旦大学物理系已讲授了二十多年．在文革以前，复旦大学物理系使用的理论力学教材是全国统编教材：南京大学周衍柏先生编著的《理论力学》．这本书内容很全面，起点放得较低，逐步深入提高，例题和习题丰富，是一本很好的教材．但这本书是按五年制 120～140 学时的教学计划编写的．到了 70 年代后期，我国高校情况有了很大变化，学制和教学计划作了重大调整，理论力学的学时压缩到 60～70 学时．这样原来的统编教材就显得不太适

用．在这种情况下，本书作者于1979年编写了一本新的理论力学讲义在复旦大学物理系内部使用，受到同学们的广泛欢迎．1986年这本讲义修改后由复旦大学出版社以《经典力学》为书名出版．本书是在该书的基础上改写而成的．

多数大学物理系本科生所用的理论力学教材，都采取先运动学、静力学后动力学，先质点、质点系后刚体，先牛顿力学后分析力学这样一种逻辑体系．它的优点是先易后难，先具体后抽象，学生易于接受．但也有一些缺点．第一，普通物理的力学课几乎无一例外都是按先运动学后动力学，先质点后刚体的体系进行教学的，理论力学如仍按这样的体系教学，学生会感到理论力学课是普通力学课的简单重复，不利于调动学生学习的积极性．第二，按这种体系进行教学，牛顿力学必然要花去大部分学时，留给分析力学的学时就很少，而对物理系后继课程来说，分析力学比牛顿力学更重要．为了克服这两方面的缺点，本书的内容结构相对过去的传统教材而言，作了较大调整：

1．运动学和静力学不单独设立章节，必需的内容结合动力学来讲，同时将质点动力学和质点系动力学合在一起讲．这样牛顿力学的理论部分就减少了许多与普物力学重复的篇幅，所节省的学时可使分析力学的比重提高．

2．提前讲拉格朗日方程，把牛顿方程和拉格朗日方程作为处理典型力学问题时可同时并用的方法，使学生有更多的机会熟悉拉格朗日方程的实际应用．学习理论力学的难点是做习题，提前讲拉格朗日方程，可使学生做习题时有两类方法选择，哪一种方法方便就采用哪一种方法，这样可大大降低做习题的难度，并可体会这两类不同方法各自的优缺点．

根据以上考虑，本书的内容分四大部分：(1)第一章和第二章分别介绍牛顿力学和拉格朗日方程的基本内容，这是理论力学课的基础理论部分．(2)第三章到第七章分别讨论两体问题、刚体、非惯性参考系、微振动和阻尼运动五类典型的力学问题，介绍处理这些问题的思想、方法和结论．(3)第八章讲经典力学的哈密顿理论，它是专门为后继理论物理课的需要作理论准备的．(4)第九章哈密顿理论的应用和第十章流体力学，这两章内容超出了本课程教学大纲的范围，适宜作为补充教材或课外阅读材料．第九章的内容对于理解经典力学哈密顿理论的精髓和融会贯通力学、电动力学、统计物理、量子力学共同的理论基础会大有裨益．第十章的流体力学方程是物理学最重要的基本方程组之一，应用范围很广．所以了解第九、十两章的内容对于完善物理系学生的整体知识结构是有好处的，对于今后拟报考物理类研究生的学生，可能是不可缺少的．

为便于教学，在本书目录中将各节内容分为三类．一类不加*号，共40节，它是经典力学的核心内容，要多花些教学时间，力求熟练掌握．第二类加一个*号，共18节，属于理论力学课程的一般内容，可由教师根据学时多少和学生的实际水平适当选用．第三类加了两个*号，共21节，它超出了本科生理论力学课

程的基本要求,宜作为学生的课外阅读材料;但对于今后拟报考物理类研究生的读者,建议他们在教师的指导下认真自学,因为我国目前物理类研究生的基础课一般都不再单独讲述这些内容. 对于习题,凡是打有 * 号的都是较难的题目,不宜作为课堂例题或布置给学生作为必做的课外题.

本书图表按章顺序编号,例如图 2.3 表示第二章的第三个图;公式分章按节顺序编号,例如(2.3)式表示该章的第二节的第三个公式;如要引用非本章的公式时,会特别说明该公式是哪一章的.

本书在历次编写和修改过程中,曾广泛参考国内外综合大学物理类专业所用的理论力学教材,数量较多,这里不一一列举. 最主要的参考书是下列三本:

1. 周衍柏. 理论力学. 南京:江苏人民出版社,1961.

2. 朗道,栗弗席兹. 力学. 北京:高等教育出版社,1959.

3. H. Goldstein. Classical Mechanics (Second Edition). Cambridge: Addison-Wesley, 1980.

本书由同济大学沈蕤教授和复旦大学蔡怀新、倪光炯、贾启民教授审稿,他们提出了许多宝贵的意见,作者表示衷心感谢. 马永利副教授参与了本书第二版的部分修订工作.

本书的修订再版得到"国家基础科学研究与教学人材培养基地"的部分资助.

金尚年

2001 年 1 月

目　　录

第一章　牛顿动力学方程

本章讲四个问题:(1)首先简单介绍牛顿名著《自然哲学的数学原理》(简称《原理》)中所确立的物质观、时空观、运动观以及自然科学认识论、方法论的四项推理规则——简单性、统一性、因果性和真理性,这是经典力学立论的理论基础.(2)给出牛顿力学的几个基本定律和定理:牛顿运动定律和动量定理、角动量定理、能量定理及其相应的守恒定律.(3)给出质点位置 $\boldsymbol{r}$、速度 $\boldsymbol{v}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}$ 在平面极坐标、球坐标、柱坐标和自然坐标系中的表示式.(4)作为牛顿动力学方程的应用举例,讨论变质量体系和等离子体单粒子模型的运动问题.

§1.1　牛顿的《原理》奠定了经典力学的理论基础

力学是自然科学中发展得最早、最成熟的一门学科.每一门学科的形成和发展,都有其自己的理论和实验基础.力学的实验基础是毋庸置疑的,每一个人都有许多亲身的实践经验.近代力学的理论体系是在伽利略-牛顿时代形成的.1687年牛顿(I. Newton, 1643—1727)发表的《原理》为力学科学奠定了坚实的理论基础.以《原理》作为立论依据的力学理论称为**经典力学**.本课程就是讲述经典力学的理论框架及其对典型力学问题的求解方法的.

力学研究的是物体的机械运动,即研究物体的空间位形随时间的变化规律.因此要建立力学的理论体系,首先要对什么是物质、什么是时间空间、什么是运动有明确的规定.物质观、时空观、运动观是古代自然哲学的核心问题,但在牛顿以前,不同学派对物质、时空、运动并没有公认的统一见解,更没有可用数学作定量表述的形式.牛顿在综合了伽利略(G. Galilei, 1564—1642)等人工作的基础上,在《原理》中首先解决了这一问题,使物质、时空、运动从一般哲学概念发展为可用数学作定量表述的定义、定律、定理,并迅速得到了公众的确认,从而奠定了经典力学的理论基础.

在欧洲,从古希腊到伽利略-牛顿时代,占统治地位的自然哲学观是亚里士多德(Aristotle,前384—前322)的思想体系.在物质观方面,亚里士多德反对原子论.他认为地球上的万物是由火、气、水、土四种元素和冷热、干湿两对可感知性所组成的,而月亮以上的世界则是由永恒不变的以太凝聚而成.与伽利略-

牛顿同时代的笛卡尔(R. Descartes, 1596—1650)也认为整个宇宙是由以太涡旋形成的. 系统的、完整的力学理论不可能在这种物质观的基础上建立起来. 牛顿彻底摒弃了亚里士多德的物质观,复活和发展了古希腊原子论的思想. 他认为所有的物质,不论天上还是地下,都由可以称之为原子的微粒所组成;原子有不同的层次,可细分为7类,光也是其中之一. 原子之间存在相互吸引和排斥的力,因而可以凝聚分离,构成万物及其运动. 牛顿的原子论不再停留在古希腊学者的哲学思考,已十分接近于由道尔顿(J. Dalton, 1766—1844)、阿伏加德罗(A. Avogadro, 1776—1856)所建立的近代原子分子理论了;实际上后者正是继承了牛顿原子论的思想才发展起来的. 在原子论的基础上,牛顿建立了物质在力学理论中的质点模型. 有了质点模型,进而就可以建立两体、三体、质点系、刚体、流体等力学模型. 牛顿的《原理》共分三篇,在第一篇之前另加了两节统率全书的内容. 第一节为定义,给出了质量、动量、力等建立力学理论所必需的辅助概念的确切定义. 这些定义和以原子论为基础的质点模型结合起来,构成了经典力学完整的物质观. 经典力学的适用范围也是以这样的物质观为其前提的.

牛顿在《原理》的第一节之后作了四个注释,阐述了关于时间、空间的基本概念,以及区别相对运动和绝对运动的思想,它们构成了经典力学的时空观. 我们现在讨论力学问题的时候,习惯于用一条无限长的直线代表时间,在其上任取一点代表现在,向右代表未来,向左代表过去,相同的长度代表相同的时间间隔. 这样所定义的时间用数学术语来表示就是:时间是一维的、均匀的、无限的,与空间和物质都没有关系. 这就是牛顿的**绝对时间**. 对于空间也类似,我们可以取空间任意一点为中心,把它作为坐标系的原点,过原点取相互正交的三个坐标轴,其方向可以任意选取,坐标轴可向正负方向无限延伸,任意一个质点在空间中的位置均可用这个坐标系中的3个坐标值来表示. 牛顿认为存在绝对空间,如上所述选取的坐标系,其原点静止于绝对空间中,坐标轴的方向一经选定也不再改变,那么这个坐标系就代表了**绝对空间**. 以绝对空间为参考系的物质的运动称为**绝对运动**. 一切相对于绝对空间作匀速直线运动的参考系称为**惯性参考系**. 牛顿的绝对空间用数学术语来表述就是:其性质是三维的、均匀的(坐标原点可任意选取)、各向同性的(3个正交坐标轴的方向可任意选取)、无限的.

牛顿在《原理》中所阐述的运动观主要有两方面:一是牛顿三定律和力学相对性原理的确立,它们是力学的最高原理. 这是伽利略等许多人工作成果的总结和提高. 二是万有引力定律的发现. 虽然胡克(R. Hooke, 1635—1703)与牛顿之间曾经有万有引力的发现权之争,但牛顿对此作出了最主要的贡献是无可争议的. 牛顿明确定义了动力学理论所必需的一套完整的辅助概念,发明了微积分,将力学原理与数学结合起来,使力学成为可以作严密逻辑运算的科学理论. 牛顿以前的学者往往只研究一些具体的力学规律,如伽利略的落体运动,惠

更斯(C. Huygens, 1629—1695)的单摆运动,胡克的弹性运动等,牛顿则把许多互不相关的力学现象纳入了一个统一的理论框架. 特别是万有引力的发现,使天体运动和地面物体的运动服从相同的运动规律,彻底打垮了长期占统治地位的亚里士多德的天上和地上有别的神话.

牛顿在《原理》中关于力学三定律是这样叙述的:

第一定律 一个物体,若没有外力影响使其改变状态,则该物体仍保持其原来静止的或匀速直线运动的状态.

第二定律 运动的变化,与所加的力成正比,其方向为力作用的方向.

第三定律 作用恒与其反作用相等,方向则相反.

说明:运动之量,以速度及物质之量联合度量之.

据上所述,牛顿第二定律原始的数学表示式应为

$$\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}. \tag{1.1}$$

如果物体的质量 m 与时空及其运动无关,m 恒为常量,则(1.1)式可约化为现在常见的形式:

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} \text{ 或 } m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F}. \tag{1.2}$$

这里附带说一句,(1.1)式在相对论力学中仍然成立,但(1.2)式在相对论力学中不再成立.

按牛顿的本意,运动三定律是在绝对空间中成立的. 但在牛顿以前伽利略就已经提出:在一个系统内部的任何力学实验,都不能决定这一系统是静止的还是在作匀速直线运动. 这就是**力学相对性原理**. 根据这一原理,牛顿三定律对于所有的惯性参考系都是成立的. 今后如无特别说明,本书都是在惯性参考系中讨论问题并作计算的.

牛顿构想的绝对空间实际上是不存在的,任何一个实际的参考系也都不是严格的惯性系,但我们可以根据问题的需要,选取适当的实物作为参考系来取代惯性系. 从观测的角度来说,总是以充分大的范围中平均处于静止的天体作为惯性系的依据. 在大多数力学实验中,地球已"充分大",所以地球静止系可以看成是一个很好的惯性系. 更严格时可以选择太阳指向某一恒星的方向作为惯性系的坐标轴.

惯性系有无穷多个,许多实际问题的计算要涉及到两个惯性系 S 和 S′. 设 S′相对于 S 以匀速 $\boldsymbol{u}$ 运动,则这两个惯性参考系之间的时空坐标的变换关系为:

$$\begin{cases} \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{u}t', \\ t = t', \end{cases} \tag{1.3}$$

式中 $\boldsymbol{r}$、t 和 $\boldsymbol{r}'$、t' 分别是 S 系和 S′系中的空间、时间的坐标．(1.3)式称为**伽利略变换**．将(1.3)式代入(1.2)式，可知牛顿第二定律在伽利略变换下保持不变．因此力学相对性原理又可表述为：力学定律对于伽利略变换保持不变．

以上就是牛顿在《原理》中所阐述的物质观、时空观、运动观及其数学表述形式的要点，牛顿特地把它们称之为"自然哲学的数学原理"．经典力学就是以上述原理为逻辑演绎前提推理出来的一个完整的理论体系．如果在某些情况下，自然界的实际情况与上述物质观、时空观、运动观有明显的差异，那么经典力学就不再适用，需要建立新的力学理论，如相对论力学、量子力学，它们已不再属于本课程的范围．

牛顿在《原理》中还以他自己科学研究的经验，对自然科学的认识论、方法论作了精辟的论述．在《原理》第二版的第三卷问世时，牛顿在最前面提出了四条《哲学推理规则》：

规则Ⅰ　除去那些真实的而又足以说明自然界事物的表象的原因之外，我们承认自然界事物没有更多的原因．

规则Ⅱ　所以，对于同样的自然界的结果，我们必须尽可能地归之于同样的原因．

规则Ⅲ　物体的属性，既不允许增强也不允许削弱，凡是在我们的实验所能到达的范围内发现属于一切物体的属性，都应视为一切物体的普遍属性．

规则Ⅳ　在实验哲学上，我们把用一般归纳法从现象推导的命题，看作准确的或很接近于真实的，虽然可以想象出任何相反的假设，但是直到其他现象出现而使其变得更准确或出现例外之前，仍应如此看待．

这四条规则的文字比较晦涩，但仔细推敲不难领会其意思．用现在惯常的词语来表示，这四条规则可理解为：**简单性原理、因果性原理、统一性原理和真理性原理**．简单性原理的意思是，科学上正确的东西都是简单的，如果同一个问题可用简繁不同的方法得到相同的结论，应该选用简单的方法．因果性原理就是决定论，直到 20 世纪初量子力学建立以前，因果律是物理学最牢固的信条之一．统一性原理是指牛顿在《原理》中所阐述的物质观、时空观、运动观对整个自然界都是普遍适用的，这是自然哲学的根本所在，否则就难以称之为"哲学"了．真理性原理就是绝对真理和相对真理相结合的观点，规则Ⅳ中所指出的从实验现象通过归纳分析得出的结论，应该承认其是真实的或接近真实的，这就是承认客观真理的存在；同时又指出以后可能会出现新的现象使结论变得更准确，这就是相对真理的观点．这四条哲学推理规则是牛顿本人从事科学研究的认识论、方法论准则，同时通过《原理》的传播，直接为经典力学的进一步发展提供了强大的思想武器．经典力学的理论正是在这些规则的指引下发展和完善起来的．我们了

解这些规则,对于理解整个经典力学的思想理论体系有很大的帮助.

§1.2 牛顿第二定律在常用坐标系中的表示式

牛顿运动定律的核心是**第二定律**,本节将对其数学表示形式作较深入的讨论. 当物体的质量 m 不变时,牛顿第二定律的表示式为

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}, \tag{2.1}$$

力 $\boldsymbol{F}$ 一般是物体的位置 $\boldsymbol{r}$、速度 $\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}$ 和时间 t 的函数:

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t), \tag{2.2}$$

其中 $\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$. 本书中凡是函数对时间 t 求一次导数,我们用在该函数的符号上加一点来表示,求二次导数则加两点. 因此(2.1)式又可表示为

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t), \tag{2.3}$$

这是一个二阶矢量常微分方程,具体求解时我们要选取一个适当的正交坐标系,将(2.3)式投影为三个标量方程,再联立求解. 常用的坐标系有直角坐标、平面极坐标、球坐标、柱坐标和自然坐标. 下面就来给出(2.3)式在这些坐标系中的具体表示式.

(1) 直角坐标

在直角坐标系中,空间任一点 P 的位置可用 x、y、z 三个参数来表示. 用 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别表示沿 x 轴、y 轴和 z 轴的单位矢量,它们都不随时间改变. 质点的位置和速度可表示为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}, \tag{2.4}$$

$$\boldsymbol{v}=\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}+\dot{z}\boldsymbol{k}. \tag{2.5}$$

方程(2.3)可表示为

$$\begin{cases} m\ddot{x}=F_x(x,y,z;\dot{x},\dot{y},\dot{z};t), \\ m\ddot{y}=F_y(x,y,z;\dot{x},\dot{y},\dot{z};t), \\ m\ddot{z}=F_z(x,y,z;\dot{x},\dot{y},\dot{z};t). \end{cases} \tag{2.6}$$

(2) 平面极坐标

在平面极坐标中,平面上任一点 P 的位置可用参数 r、θ 来表示. $\boldsymbol{e}_r$ 和 $\boldsymbol{e}_\theta$ 分别表示矢径 $\boldsymbol{r}$ 增加方向和极角 θ 增加方向的单位矢量. 随着 P 点的运动,$\boldsymbol{e}_r$ 和 $\boldsymbol{e}_\theta$ 的方向都要随时间改变. 从图 1.1 中可以看到:

$$\boldsymbol{e}_r=\cos\theta\boldsymbol{i}+\sin\theta\boldsymbol{j},$$

$$\boldsymbol{e}_\theta=-\sin\theta\boldsymbol{i}+\cos\theta\boldsymbol{j},$$

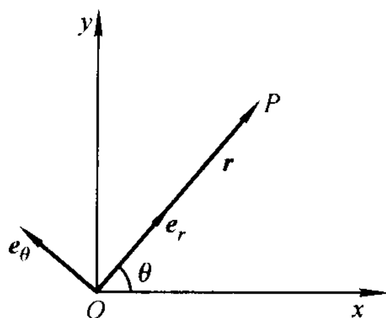


图 1.1

$$\dot{e}_r = \frac{de_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}e_\theta, \tag{2.7}$$

$$\dot{e}_\theta = \frac{de_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}e_r. \tag{2.8}$$

质点的位置 $\boldsymbol{r}$ 和速度$\boldsymbol{v}$ 可表示为

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r, \tag{2.9}$$

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta. \tag{2.10}$$

质点的加速度为

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta. \tag{2.11}$$

因此,牛顿第二定律可表示为

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r, \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = F_\theta, \end{cases} \tag{2.12}$$

式中 F_r 和F_θ 分别为$\boldsymbol{F}$ 在$\boldsymbol{e}_r$ 和$\boldsymbol{e}_\theta$ 方向的投影.

(3) 球坐标

在球坐标中,空间一点 P 的位置可用 r、θ、φ 三个参数来表示,用 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$、$\boldsymbol{e}_\varphi$ 分别表示 r、θ、φ 三个参数增加方向的单位矢量,它们都是随时间变化的. 从图 1.2 中可以看到:

$$\boldsymbol{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{j} + \cos\theta\boldsymbol{k}, \tag{2.13}$$

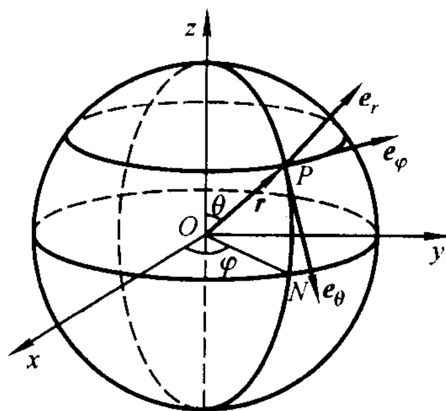


图 1.2

并且当 φ 不变,θ 变为 $\theta + \frac{\pi}{2}$时,新的 $\boldsymbol{e}_r$ 方向即为原$\boldsymbol{e}_\theta$ 的方向. 因此,

$$\boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_r\Big|_{\theta\to\theta+\frac{\pi}{2}} = \cos\theta\cos\varphi\boldsymbol{i} + \cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{j} - \sin\theta\boldsymbol{k}, \tag{2.14}$$

而

$$\boldsymbol{e}_\varphi = \boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\theta = -\sin\varphi\boldsymbol{i} + \cos\varphi\boldsymbol{j}. \tag{2.15}$$

于是

$$\dot{\boldsymbol{e}}_r = \frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial\varphi}\dot{\varphi} = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \sin\theta\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi, \tag{2.16}$$

$$\dot{\boldsymbol{e}}_\theta = \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial\varphi}\dot{\varphi} = -\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi, \tag{2.17}$$

$$\dot{\boldsymbol{e}}_\varphi = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\theta) = -\sin\theta\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_r - \cos\theta\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\theta. \tag{2.18}$$

质点的位置和速度可表示为

$$r = re_r, \tag{2.19}$$

$$v = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \dot{r}e_r + r\dot{\theta}e_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta e_\varphi. \tag{2.20}$$

我们进一步求得加速度 a 的表示式后，得到牛顿第二定律的形式为

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta) = F_r, \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta) = F_\theta, \\ m(r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta) = F_\varphi. \end{cases} \tag{2.21}$$

(4) 柱坐标

柱坐标可看成是由 Oxy 平面上的平面极坐标 R、φ 和直角坐标 z 组合而成. 用 e_R、e_φ 和 k 表示相应的单位矢量，则单位矢量随时间的变化为

$$\begin{cases} \dot{e}_R = \dot{\varphi}e_\varphi, \\ \dot{e}_\varphi = -\dot{\varphi}e_R, \\ \dot{k} = 0. \end{cases} \tag{2.22}$$

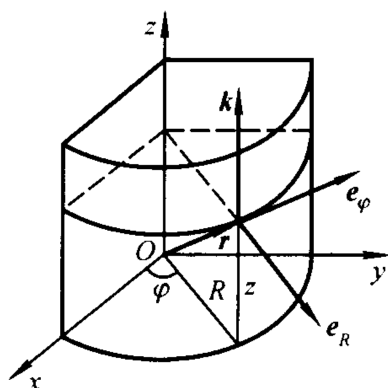


图 1.3

质点的位置和速度可表示为

$$r = Re_R + zk, \tag{2.23}$$

$$v = \dot{R}e_R + R\dot{\varphi}e_\varphi + \dot{z}k. \tag{2.24}$$

牛顿第二定律可表示为

$$\begin{cases} m(\ddot{R} - R\dot{\varphi}^2) = F_R, \\ m(R\ddot{\varphi} + 2\dot{R}\dot{\varphi}) = F_\varphi, \\ m\ddot{z} = F_z. \end{cases} \tag{2.25}$$

(5) 自然坐标与内禀方程

上述几种坐标系，其单位矢量或者和运动完全无关(直角坐标)，或者只和质点运动的位置有关(平面极坐标、球坐标和柱坐标). 此外还有一种由质点速度的方向来决定其单位矢量的坐标系——自然坐标系，其相应的牛顿第二定律的表示式称为**本性方程或内禀方程**.

先讨论质点轨道为平面曲线的情况. 如果我们用 e_t 和 e_n 表示轨道的切线方向和法线方向的单位矢量，则质点的速度可表示为

$$v = ve_t, \tag{2.26}$$

质点的加速度则为

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}e_t + v\frac{\mathrm{d}e_t}{\mathrm{d}t}.$$

为了计算 $\frac{\mathrm{d}e_t}{\mathrm{d}t}$，如图 1.4 所示，设 s 为轨道的弧长，φ 为轨道的切线和 x 轴的夹

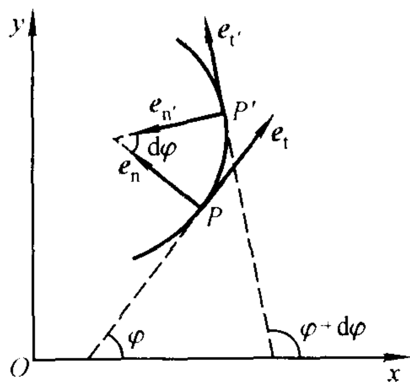


图 1.4

角,则$|de_t| = |e_t|d\varphi = d\varphi$,所以

$$\left|\frac{de_t}{dt}\right| = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{ds}\frac{ds}{dt},$$

式中$\frac{ds}{dt}$即为质点速率v,$\frac{d\varphi}{ds}$是轨道的**曲率**(曲率半径ρ的倒数). 因此$\frac{de_t}{dt}$的数值为

$$\left|\frac{de_t}{dt}\right| = \frac{v}{\rho}.$$

关于$\frac{de_t}{dt}$的方向,因de_t和e_t垂直,而且从图中可知de_t必指向轨道的凹面,可见$\frac{de_t}{dt}$的方向就是法线e_n的方向. 于是我们得到

$$a = \frac{dv}{dt}e_t + \frac{v^2}{\rho}e_n. \tag{2.27}$$

牛顿第二定律则为

$$\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = F_t, \\ m\dfrac{v^2}{\rho} = F_n. \end{cases} \tag{2.28}$$

它和质点作圆周运动时的运动方程极为相似,只不过以轨道的曲率半径代替了圆周的半径.

下面再讨论质点沿着某一空间曲线运动的情况. 图 1.5 表示质点P在空间运动的轨道. 在P点附近的轨道上找两个点P_1和P_2,直线PP_1和PP_2可决定一个平面,当P_1和P_2变动时,这个平面也随之变动. 当$P_1 \to P$,$P_2 \to P$时可得到一个确定的极限平面,称为轨道曲线在P点的**密切平面**. 如果轨道在P点是连续的,则在极限情况时PP_1和PP_2合成一条直线(即轨道在P点的切线),并用e_t表示这条切线的单位矢量,过P点在它的密切平面内作法线,用e_n表示其单位矢量,这条法线称为轨道曲线在P点的**主法线**. 再作

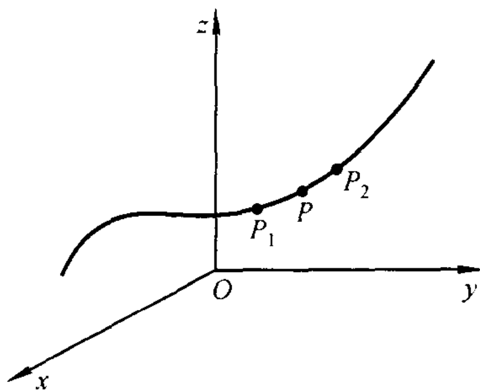


图 1.5

$$e_b = e_t \times e_n,$$

e_b也是轨道曲线在P点的法线(称为**次法线**). e_b和e_n所组成的平面称为**法平面**,e_b和e_t所组成的平面则称为**直切平面**,而e_t和e_n所组成的平面就是**密切**

平面,如图1.6所示.

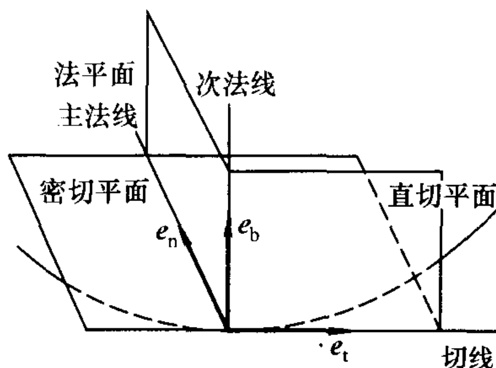


图 1.6

考虑 P 点附近一小段轨道曲线 ds,它等于 $P_1 \to P$ 时的线元 PP_1. 由于 PP_1 与 $\boldsymbol{e}_t$ 共线,故 PP_1 在密切平面内,这段线元可看成是密切平面内的轨道曲线. 因此质点的加速度公式可用平面轨道的加速度公式表示:

$$\boldsymbol{a}=\frac{dv}{dt}\boldsymbol{e}_t+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n.$$

上式表明加速度 $\boldsymbol{a}$ 在次法线 $\boldsymbol{e}_b$ 方向的分量恒为零. 因此,牛顿第二定律在空间轨道情况下可写为

$$\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt}=F_t, \\ \dfrac{mv^2}{\rho}=F_n, \\ F_b=0. \end{cases} \tag{2.29}$$

当质点由 P 点运动到另一点 P' 时,根据同样的讨论,运动方程的形式仍为(2.29)式,只不过 P' 点的 $\boldsymbol{e}_t$、$\boldsymbol{e}_n$、$\boldsymbol{e}_b$ 和 ρ 都改变了而已.

(2.28)和(2.29)式就是质点运动的本性方程或内禀方程. 这种方程经常应用于沿已知轨道运动的质点;也常应用于介质阻力不能忽略时的运动,因阻力恒与速度方向相反,所以阻力只出现在(2.29)式中的第一个方程中,问题的处理就比较方便了.

已知轨道方程求曲率半径可以应用下面的公式:

$$y=f(x), \quad \rho=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''};$$

$$r=r(\theta), \quad \rho=\frac{\left[r^2+\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{3/2}}{r^2+2\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2-r\dfrac{d^2r}{d\theta^2}};$$

$$x=x(t), y=y(t), \quad \rho=\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}{|\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}|}.$$

§1.3 质 点 系

牛顿运动定律是对质点而言的. 如果所讨论的力学体系不能抽象为单个质

点,而是由多个质点所组成的体系——质点系,那么如何给出质点系的运动微分方程呢?下面将讨论什么叫质点系和怎样建立运动微分方程两个问题.

质点系的概念是什么呢?是否所讨论的对象是两个以上的质点,就是质点系问题呢?我们先来看两个具体问题:

(1) 如果把地球和太阳都看成质点,忽略其他行星对地球的作用和太阳本身的运动,则地球的运动就是大家所熟悉的一个质点的运动,在同样的近似条件下,如何讨论整个太阳系中九大行星的运动?

(2) 如图 1.7 所示,质点 m 被约束在一光滑的水平平台上运动,质点上系着一根长为 l 的轻绳,绳子穿过平台上的小孔 O,另一端挂着一个质点 m',试讨论质点 m 的运动情况.

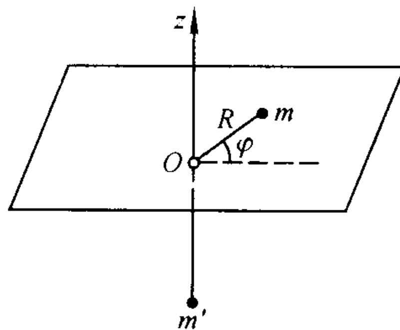


图 1.7

在这两个问题中,前者要求讨论的对象是九个质点,后者只是一个质点 m. 是否可以说前者是质点系的力学问题,后者是单质点的力学问题呢?错了,前者是单质点的力学问题,更确切地说是九个单质点问题,而后者却是由两个质点所组成的质点系问题. 因为前者九个质点的运动方程都是互相独立的,而后者的运动方程(取柱面坐标)为:

$$m(\ddot{R} - R\dot{\varphi}^2) = -F_T,$$

$$m(R\ddot{\varphi} + 2\dot{R}\dot{\varphi}) = 0,$$

式中 F_T 为绳子的张力. 这两个方程中含有三个未知函数 R、φ、F_T,不能求解,还必须把它们和 m' 的运动方程

$$m'\ddot{z} = F_T - m'g$$

及约束条件

$$R - z = l$$

联立起来,得到四个独立的方程,这正好可解出四个未知函数 R、φ、F_T、z.

从这两个具体问题的分析中可以看到,一个力学问题是单质点问题还是质点系问题,不能简单地从所讨论的对象的数目判定,而应当根据物体间的相互作用的性质来决定. 如果我们所讨论的对象是质点 A,它和质点 B 相互作用,而这种相互作用只影响质点 A 的运动,对质点 B 的运动没有影响(例如 A 为地球,B 为太阳,假定太阳不动),则 A 的运动是一个单质点力学问题,这时 B 称为 A 的外界. 若 A、B 间的相互作用对两者的运动都有影响(例如上述第二问题中的质点 m 和 m'),那么必须把它们看成是同一力学体系内部的两个物体,从而成为一个质点系问题. 显然,体系和外界的划分是相对的,例如地球和太阳的运动,在精度要求不是很高时,可把太阳看成地球的外界,地球的运动可看成是一个单

质点问题. 如果精度要求极高,必须考虑地球和太阳间的引力对太阳运动的影响,那么太阳就和地球一起组成了一个质点系问题. 质点系内部各质点间的相互作用力称为**内力**,外界对质点系各质点的作用力称为**外力**. 分清体系和外界,内力和外力,对于讨论质点系的问题,有着极为重要的意义.

如何建立质点系的运动微分方程呢? 最直接的方法是对质点系内部的每一个质点,写出相应的牛顿运动方程:

$$m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{F}_i, i = 1,2,\cdots,n, \tag{3.1}$$

式中的足标 i 表示第i 个质点. 分量方程共有 $3n$ 个. 若质点系内部各质点之间以及与外界之间存在约束,则 $\boldsymbol{F}_i$ 中还包含未知的约束力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$. 一般来说,$k$ 个约束条件就有k 个未知的约束力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}j}(j=1,2,\cdots,k)$. 因此,方程组(3.1)中共有 $3n+k$ 个未知函数$\boldsymbol{r}_i$ 和 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}j}$. 求解方程组(3.1)时,必须再加上 k 个约束方程(它们一般是各质点的位置、速度和时间的函数):

$$f_j(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_n;\dot{\boldsymbol{r}}_1,\cdots,\dot{\boldsymbol{r}}_n;t)=0, j=1,2,\cdots,k. \tag{3.2}$$

这时共有 $3n+k$ 个方程,联立起来就能求解了. 例如由 3 个质点所组成的受到 5 个约束条件的质点系,将有 14 个方程联立在一起,显然求解这个二阶微分方程组,是一件很不容易的事. 对质点数目稍多的受约束体系,即使能写出每个质点的运动方程,实际上还是很难求解的. 在牛顿动力学范围内,运用质点系的动量定理、角动量定理和能量定理,是解决此困难的一个办法. 这三个定理所描述的是整个体系的动量、角动量和能量的变化规律,尽管不能给出体系内部每一个质点运动的详细情况,但能以简洁的方式给出体系整体运动的一些规律,可以解决许多实际的问题.

§1.4 动量定理

质点的动量 $\boldsymbol{p}$ 定义为:

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}. \tag{4.1}$$

因此,牛顿第二定律可写为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}. \tag{4.2}$$

上式表明:**质点动量的变化率等于质点所受到的力**.

对于由 n 个质点所组成的质点系,应用(4.2)式可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_i}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})} + \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{i})}, \quad i=1,2,\cdots,n. \tag{4.3}$$

式中 $\boldsymbol{p}_i$ 为第i 个质点的动量,$\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}$ 为外界对第i 个质点的作用力,$\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{i})}$ 为质点系

内部其他质点对第 i 个质点的合作用力：

$$\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{i})} = \sum_{j \neq 1} \boldsymbol{F}_{ji},$$

其中 $\boldsymbol{F}_{ji}$ 为体系内第 j 个质点对 i 个质点的作用力. 将(4.3)式中的 n 个方程累加起来,得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})} + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{i})}. \tag{4.4}$$

质点系的动量 $\boldsymbol{p}_s$ 定义为：

$$\boldsymbol{p}_s = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{v}_i. \tag{4.5}$$

交换(4.4)式左边求和与求微商的次序,(4.4)式左边可表示为：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{p}_i = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_s}{\mathrm{d}t}. \tag{4.6}$$

根据牛顿第三定律,恒有 $\boldsymbol{F}_{ji} = -\boldsymbol{F}_{ij}$. 因此(4.4)右边第二项为：

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{i})} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i} \boldsymbol{F}_{ji} = 0. \tag{4.7}$$

将(4.6)和(4.7)式代入(4.4)式得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_s}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})} = \boldsymbol{F}^{(\mathrm{e})}, \tag{4.8}$$

式中 $\boldsymbol{F}^{(\mathrm{e})}$ 为合外力. (4.8)式表明:**质点系动量的变化率等于体系所受到的合外力**,质点系动量的变化是和体系内部的相互作用无关的. 这就是质点系动量定理.

由(4.8)式可知,如果质点系所受的合外力为零,则

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_s}{\mathrm{d}t} = 0,$$

于是

$$\boldsymbol{p}_s = \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{v}_i = \text{常矢量}.$$

这就是**质点系动量守恒定律**. 有时质点系所受的合外力虽不为零,但在某一固定方向(例如 x 方向)的合外力为零,则

$$p_{sx} = \text{常量}.$$

这时质点系的总动量虽不守恒,但 x 方向的动量守恒. 例如外力仅为重力时,质点系水平方向的动量守恒.

利用质心的概念,质点系动量定理还可以表示成质心运动定理的形式. 质心的位置 $\boldsymbol{r}_C$ 定义为：

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{m_s}, \tag{4.9}$$

式中 m_s 为质点系的总质量. 利用(4.9)式,质点系的动量 $\boldsymbol{p}_s$ 可表示为

$$\boldsymbol{p}_s = \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i = m_s \boldsymbol{v}_C, \tag{4.10}$$

式中 $\boldsymbol{v}_C$ 是质心的速度. 因此质点系动量定理可改写为:

$$m_s \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_C}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}^{(e)}. \tag{4.11}$$

上式表明,质心的运动,就好像一个质点的运动一样:**此质点的质量等于质点系的质量,作用在此质点上的力等于作用在整个质点系上的合外力**. 这就是**质心运动定理**. 所以质心的运动,由(4.11)式完全决定.

在质点系的动量定理中,内力 F_{ij} 完全不出现. 直接用牛顿第二定律解质点系的运动方程之所以困难,一个重要原因在于方程中要出现内力. 动量定理直接把内力从方程中消去了,我们只要知道体系所受的外力,体系质心的运动即可简单地求得,因而是一个很有用的定理.

§1.5 角动量定理

质点的矢径 $\boldsymbol{r}$ 和它的动量 $m\boldsymbol{v}$ 的矢量积,称为质点对坐标原点的**角动量** $\boldsymbol{L}$:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}. \tag{5.1}$$

角动量又称**动量矩**,是描述物体运动特性的重要物理量之一.

(5.1)式两边对时间 t 求微商得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \times m\boldsymbol{v} + \boldsymbol{r} \times m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}.$$

因 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}$,所以右边第一项为零. 考虑到 $m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}$,得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}, \tag{5.2}$$

式中

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \tag{5.3}$$

是质点所受到的对坐标原点的**力矩**. (5.2)式表明:**质点角动量的变化率等于质点所受到的力矩**,这就是**质点角动量定理**. 如果作用在质点上的力矩为零,则质点的角动量守恒. 角动量守恒的最重要的一类运动是质点在中心力作用下的运动. 这种情况下,以力心为坐标原点,质点初始时刻的矢径 $\boldsymbol{r}_0$ 和初速度 $\boldsymbol{v}_0$ 两个矢量确定一平面,则力和速度均在此平面内,因此质点将恒在此平面内运动. 取平面极坐标,中心力可表示为 $\boldsymbol{F} = F(r)\boldsymbol{e}_r$,因此质点所受到的力矩

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = r\boldsymbol{e}_r \times F(r)\boldsymbol{e}_r = 0,$$

所以质点的角动量守恒：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L} &= \boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v} = r\boldsymbol{e}_r\times m(\dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta)\\ &= mr^2\dot{\theta}\boldsymbol{k} = \text{常矢量}.\end{aligned}$$

第三章中将详细讨论这类运动.

有时质点所受的总力矩虽不为零，但力矩在某一固定的方向的分量恒为零，则此方向上的角动量分量守恒. 例如质点只受重力矩的作用时，由于重力矩恒在水平方向，因此铅直方向的角动量守恒.

质点系的角动量定义为

$$\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i. \tag{5.4}$$

上式两边对时间 t 求微商得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t}\times m_i\boldsymbol{v}_i + \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i\times m_i\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}t}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i\times(\boldsymbol{F}_i^{(e)} + \boldsymbol{F}_i^{(i)}).\end{aligned}$$

上式右边第二项内力矩之和可表示为

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i^{(i)} = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i\times\sum_{j\neq i}\boldsymbol{F}_{ji} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{ji}.$$

在右端的求和中，对于任一项 $\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{ji}$，必有与之对应的另一项 $\boldsymbol{r}_j\times\boldsymbol{F}_{ij}$. 将这两项合在一起得

$$\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{ji} + \boldsymbol{r}_j\times\boldsymbol{F}_{ij} = (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)\times\boldsymbol{F}_{ji} = \boldsymbol{r}_{ji}\times\boldsymbol{F}_{ji}$$

从图 1.8 可知 $\boldsymbol{r}_{ji}$ 在质点 j 和质点 i 的连线方向. 一般情况下 $\boldsymbol{F}_{ji}$ 的方向和 $\boldsymbol{r}_{ji}$ 是平行的，两者的矢量积为零. 由此可以推断：

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i^{(i)} = 0.$$

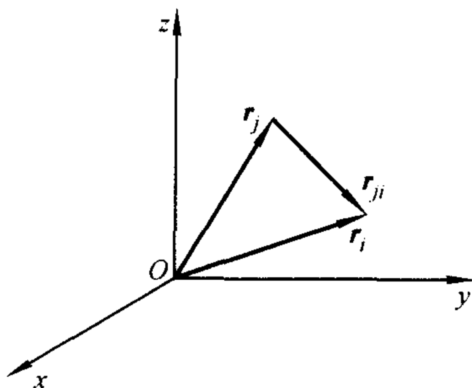


图 1.8

于是

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i^{(e)}. \tag{5.5}$$

这就是**质点系的角动量定理：质点系角动量的变化率等于作用在质点系上所有外力矩的和，与体系内部的相互作用无关**. 如果质点系所受到的外力矩为零，则体系角动量守恒；在某一固定方向的外力矩为零，则角动量在该方向的分量守恒.

以上所讨论的角动量和力矩都是对惯性系中的坐标原点而言的. 对惯性系

中其他任一点 P 来说,角动量和力矩仍有意义. 如图 1.9 所示,质点系对 P 点的角动量和力矩可表示为

$$\boldsymbol{L}_P = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i' \times m_i \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{M}_P = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{F}_i^{(e)},$$

其中 $\boldsymbol{r}_i'$ 是第 i 个质点对 P 点的位置矢量,$m_i \boldsymbol{v}_i$ 是惯性系中第 i 个质点的动量. 利用

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_P + \boldsymbol{r}_i',$$

图 1.9

可以得出 $\boldsymbol{L}_P$、$\boldsymbol{M}_P$ 和 $\boldsymbol{L}$、$\boldsymbol{M}$ 之间的关系:

$$\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{r}_P + \boldsymbol{r}_i') \times m_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{r}_P \times m_s \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{L}_P,$$

$$\boldsymbol{M} = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{r}_P + \boldsymbol{r}_i') \times \boldsymbol{F}_i^{(e)} = \boldsymbol{r}_P \times \boldsymbol{F}^{(e)} + \boldsymbol{M}_P.$$

将这两个表示式代入(5.5)式并考虑到 $m_s \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_C}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}^{(e)}$,得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_P}{\mathrm{d}t} = -\boldsymbol{v}_P \times m_s \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{M}_P. \tag{5.6}$$

上式表明:如果 P 点是惯性系中的固定点,$\boldsymbol{v}_P = 0$,则对 P 点的角动量定理仍保持(5.5)式的形式;如果 $\boldsymbol{v}_P \neq 0$,一般情况下角动量定理就不再保持(5.5)式的形式. 但有例外,如果 P 点是质点系的质心 C,或 $\boldsymbol{v}_P$ 和 $\boldsymbol{v}_C$ 在运动过程中永远平行,则(5.6)式右边第一项为零,角动量定理仍然保持原有的形式. 对质心 C 而言,我们有

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}_C \times m_s \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{L}_C, \tag{5.7}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_C. \tag{5.8}$$

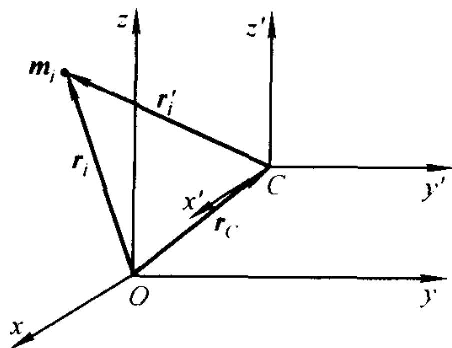


图 1.10

以上均在惯性系中讨论,非惯性系中角动量定理的一般表示式留待第五章中讨论. 但这里我们先指出,对于跟随质点系质心平动的参考系——**质心系**(当质心有加速度时,质心系不是惯性系),角动量定理也和(5.5)式的形式相同. 如图 1.10 所示,我们用 $Cx'y'z'$ 表示质心系,用 $\boldsymbol{r}'$、$\boldsymbol{v}'$、$\boldsymbol{L}'$、$\boldsymbol{M}'$ 表示质心系中相应的量,则

$$\boldsymbol{L}' = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i' \times m_i \boldsymbol{v}_i',$$

$$\boldsymbol{M}' = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{F}_i^{(e)}.$$

这里的 $\boldsymbol{L}'$ 和(5.7)式中的 $\boldsymbol{L}_C$ 在概念上是不同的，两者虽然都是对同一点 C 来说的，但 $\boldsymbol{L}'$ 中的 $\boldsymbol{v}'_i$ 是质心系中第 i 个质点的速度，$\boldsymbol{L}_C$ 中的 $\boldsymbol{v}_i$ 则是惯性系中第 i 个质点的速度，$\boldsymbol{v}'_i$ 一般和 $\boldsymbol{v}_i$ 不相同，因而 $\boldsymbol{L}'$ 和 $\boldsymbol{L}_C$ 是不同的两个量．但是可以证明这两个量实际上却是相等的．下面给出这一证明．

由图 1.10 知

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{r}'_i,$$

两边对 t 求微商，得

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}'_i, \tag{5.9}$$

代入 $\boldsymbol{L}_C$ 的表示式得

$$\boldsymbol{L}_C = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}'_i \times m_i \boldsymbol{v}_i = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}'_i\right) \times \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{L}'.$$

根据质心定义，$\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}'_i = m_s \boldsymbol{r}'_C$，质心系中质心的位置矢量 $\boldsymbol{r}'_C$ 显然为零，因此

$$\boldsymbol{L}_C = \boldsymbol{L}'. \tag{5.10}$$

由于在不同参考系中对同一个点的力矩的形式是相同的，即

$$\boldsymbol{M}_C = \boldsymbol{M}' = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{F}_i^{(e)},$$

因此将它和(5.10)式一并代入(5.8)式，得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}'.$$

这就证明了质心系中的角动量定理和惯性系中的角动量定理有相同的形式．

§1.6　能量定理

质点的动能

$$T = \frac{1}{2} m v^2. \tag{6.1}$$

对上式两边微分得

$$\mathrm{d}T = m\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{v} = m \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}. \tag{6.2}$$

右边是力 $\boldsymbol{F}$ 所作的元功．(6.2)式表明：**作用在质点上的力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功，等于质点动能的增加**．这就是**质点的动能定理**．

质点系的动能：

$$T = \sum_i T_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2, \tag{6.3}$$

应用(6.2)式可得

$$\mathrm{d}T = \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i = \sum_i \boldsymbol{F}_i^{(e)} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i + \sum_i \boldsymbol{F}_i^{(i)} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i . \tag{6.4}$$

这就是**质点系动能定理:质点系动能的增加,等于外力和内力所作的元功之和**.需要指出的是,在质点系的动量定理和角动量定理中,内力均不必考虑,而动能定理则需要考虑内力.这是因为动能是标量,各对内力所作的功一般不能互相抵消.

在导出(6.2)式时,我们用了 $m\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}$ 的条件.因此上面导出的动能定理是对惯性系而言的.在非惯性系中,动能定理一般不再具有上面的形式.但是对坐标原点固定在质心上的质心系而言,其动能定理仍具有(6.4)式的形式.下面我们要先找出惯性系中的动能和质心系中的动能之间的关系.由(5.9)式得

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_i') \cdot (\boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_i') = \frac{1}{2} m_s \boldsymbol{v}_C^2 + T', \tag{6.5}$$

其中

$$T' = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 \tag{6.6}$$

为质心系中质点系的动能.(6.5)式表明:**质点系的总动能等于质点系全部质量集中在质心并以质心速度运动的动能,加上各质点相对于质心系的动能**.这一关系通常称为**寇尼希(König)定理**.

利用寇尼希定理,(6.4)式的左边可表示为

$$\mathrm{d}T = m_s \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_C}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_C + \mathrm{d}T' = \sum_i \boldsymbol{F}_i^{(e)} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_C + \mathrm{d}T',$$

而(6.4)式的右边可表示为

$$\begin{aligned}&\sum_i (\boldsymbol{F}_i^{(e)} + \boldsymbol{F}_i^{(i)}) \cdot (\mathrm{d}\boldsymbol{r}_C + \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i') \\ &= \sum_i \boldsymbol{F}_i^{(e)} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_C + \sum_i (\boldsymbol{F}_i^{(e)} + \boldsymbol{F}_i^{(i)}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i' .\end{aligned}$$

因此,得

$$\mathrm{d}T' = \sum_i \boldsymbol{F}_i^{(e)} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i' + \sum_i \boldsymbol{F}_i^{(i)} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i' . \tag{6.7}$$

这就是质心系中的动能定理,它和惯性系中的动能定理形式相同.

如果作用在质点上的力 $\boldsymbol{F}$ 仅与质点所在的位置有关,则此力对质点所作的功

$$W = \int_{r_0}^{r} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z \tag{6.8}$$

是一个线积分. 在一般情况下,这个积分的值和运动路径有关. 但如果存在一个单值函数 $V(\boldsymbol{r})$,满足条件

$$\boldsymbol{F} = -\nabla V(\boldsymbol{r}), \tag{6.9}$$

则

$$\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathrm{d}z\right) = -\mathrm{d}V. \tag{6.10}$$

于是 $\boldsymbol{F}$ 所作的功

$$W = \int_{r_0}^{r} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = V(\boldsymbol{r}_0) - V(\boldsymbol{r}) \tag{6.11}$$

只与质点的始末位置有关,与运动路径无关. 满足条件(6.9)式的力称为**保守力**. 根据矢量分析,$\boldsymbol{F}$ 为保守力的条件也可表示为

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = 0. \tag{6.12}$$

将(6.10)式代入质点的动能定理,得

$$\mathrm{d}T = -\mathrm{d}V.$$

对上式积分得

$$T + V = E = \text{常数}. \tag{6.13}$$

我们称函数 $V(\boldsymbol{r})$为物体的**势能**. **动能与势能之和是物体的机械能**. 从上面的讨论可知,如果作用在质点上的力 $\boldsymbol{F}$ 不作功或 $\boldsymbol{F}$ 为保守力,则质点的机械能守恒. 这就是**机械能守恒定律**.

当内力和外力已知时,质点系的势能可由(6.10)式积分得到

$$V = -\int \sum_i (\boldsymbol{F}_i^{(e)} + \boldsymbol{F}_i^{(i)}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i + V_0. \tag{6.14}$$

式中常数 V_0 和势能零点的选取有关,积分路径可以任意选取.

我们来求两体中心力相互作用的势能的表示式. 如图 1.11 所示,设 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 分别为质点 1 和质点 2 的矢径,$\boldsymbol{r}$ 为质点 1 相对于质点 2 的矢径,则质点 1 所受的力为:

$$\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F} = \pm F(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r},$$

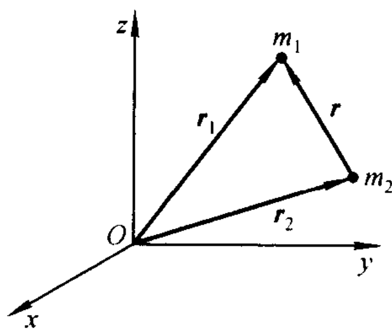


图 1.11

式中正号对应于斥力,负号对应于引力. 质点 2 受到的力为

$$\boldsymbol{F}_2 = -\boldsymbol{F}.$$

因此体系的势能为

$$V = -\left[\int \boldsymbol{F}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1 + \int F_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2\right]$$

$$= \mp \int F(r)\mathrm{d}r. \tag{6.15}$$

上式表明两体中心力的相互作用只与两物体的相对位置有关.

最重要的两体中心力是与距离平方成反比的力：

$$F(r) = \frac{\alpha}{r^2}.$$

如果把两质点相距无穷远时相互作用势能取为零,则由(6.15)式,两质点相距为 r 时的势能为

$$V = -\int \frac{\alpha}{r^2}\mathrm{d}r = \frac{\alpha}{r}.$$

排斥力($\alpha>0$)的势能为正,吸引力($\alpha<0$)的势能为负.

*§1.7 变质量运动方程

变质量体系可分为两类:一是质量随时间增加$\left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}>0\right)$,如形成中的雨滴;二是质量随时间减少$\left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}<0\right)$,如发射的火箭. 这两类问题均可用质点系动量定理导出其运动方程,而且方程的形式是一样的.

设在 t 时刻,体系的质量为 m,速度为$\boldsymbol{v}$. 在 $t+\Delta t$ 时刻,有 Δm 的质量从 m 中分离出去,它的速度为 $\boldsymbol{u}$,留下部分的质量变为 $m-\Delta m$,速度变为$\boldsymbol{v}+\Delta\boldsymbol{v}$. 因此,在时刻 t,体系的动量为

$$\boldsymbol{p}_1 = m\boldsymbol{v},$$

在时刻 $t+\Delta t$ 时,体系的动量为

$$\boldsymbol{p}_2 = (m-\Delta m)(\boldsymbol{v}+\Delta\boldsymbol{v}) + \Delta m\boldsymbol{u}.$$

由此得

$$\Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 \approx m\Delta\boldsymbol{v} - \Delta m(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}),$$

上式最后一步略去了二阶小量 $\Delta m\Delta\boldsymbol{v}$. 体系动量的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{p}}{\Delta t} = \frac{m\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}).$$

若体系所受的外力为 $\boldsymbol{F}$,则由动量定理得：

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{F}. \tag{7.1}$$

这就是**变质量体系的运动微分方程**. 对于火箭,式中$\boldsymbol{v}$ 为火箭的速度,$\boldsymbol{u}$ 为排出废气的速度. 在火箭理论中,有意义的不是废气的绝对速度 $\boldsymbol{u}$,而是废气相对于

火箭的相对速度$\boldsymbol{v}_r$. $\boldsymbol{v}_r$的方向和火箭前进的方向相反,如果令 $\boldsymbol{e}_t$ 为火箭前进方向(轨道切线)的单位矢量,则$\boldsymbol{v}_r$可表示为

$$\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = -v_r \boldsymbol{e}_t. \tag{7.2}$$

于是,火箭的运动方程可写为

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + v_r\frac{dm}{dt}\boldsymbol{e}_t = \boldsymbol{F},$$

或

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_R, \tag{7.3}$$

式中

$$\boldsymbol{F}_R = -\frac{dm}{dt}v_r\boldsymbol{e}_t = \mu v_r \boldsymbol{e}_t, \tag{7.4}$$

其中 $\mu = \left|\frac{dm}{dt}\right|$ 是单位时间内所消耗的燃料.

(7.3)式是火箭运动的基本方程式,称为**密歇尔斯基**(И. В. Мещерский, 1859 – 1935)方程. 把它和不变质量的运动方程 $m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F}$ 比较,可知 $\boldsymbol{F}_R$ 即为火箭喷射废气所得到的推力. (7.4)式表明:要增加火箭的推力,应从提高 μ 值和 v_r 值着手.

下面我们讨论密歇尔斯基方程的求解问题. 我们只讨论最简单的一种情况:忽略重力和阻力,并设相对速度 v_r 为常量. 这时(7.3)式变为

$$m\frac{dv}{dt} = -v_r\frac{dm}{dt},$$

或

$$\frac{dv}{v_r} = -\frac{dm}{m}. \tag{7.5}$$

如果设

$$m = m_0 f(t), \tag{7.6}$$

式中 m_0 为起始质量,$f(t)$是放出燃料所遵循的函数,$f(0) = 1$,则(7.5)式变为

$$\frac{dv}{v_r} = -\frac{df}{f}, \tag{7.7}$$

对上式积分得

$$v = -v_r \ln f + C_1.$$

设当 $t = 0$ 时,$v = v_0$,则 $C_1 = v_0$,因而

$$v = v_0 - v_r \ln f = v_0 + v_r \ln\frac{m_0}{m} \tag{7.8}$$

令 m_0 代表空火箭的质量,m'代表火箭所带的燃料的质量,在 $v_0 = 0$ 的条件下,

由(7.8)式得燃料终了时火箭所具有的速度为

$$v_{\mathrm{f}} = v_{\mathrm{r}} \ln \frac{m_0 + m'}{m_0} = 2.3 v_{\mathrm{r}} \lg\left(1 + \frac{m'}{m_0}\right). \tag{7.9}$$

(7.8)和(7.9)式就是所要求的火箭运动的方程式. 通常把 m'/m_0 叫做**齐奥尔科夫斯基**(Циолковский)**数**,并以 z 表示.

由(7.9)式可以得出以下结论:(1) v_{f} 和 v_{r} 成正比;(2) 增大燃料喷射速度 v_{r} 比增大燃料的数量 m' 有效得多.

如果 $v_{\mathrm{r}} = 2$ km/s,那么要使这种火箭的最大速度能够超过第一宇宙速度(8 km/s),则齐奥尔科夫斯基数 z 约在 100 左右,即燃料的质量应比空火箭的质量大 100 倍. 如计入地球引力和空气阻力,这一比值还要大. 因此目前都采取多级火箭的方案来发射人造卫星,以不断减轻火箭本身的质量 m_0,提高它的飞行速度. 这样齐奥尔科夫斯基数就可减小. 根据计算,如果用三级火箭来发射人造卫星,只要用比卫星重 1 000～2 000 倍的燃料就够了. 如果继续增加火箭的级数,效果并不显著,所以通常认为用三级或四级火箭来发射人造卫星是比较理想的.

*§ 1.8　综合例题

以上各节介绍了牛顿力学的基本理论,本节通过几个例题来讨论如何应用这些理论求解一些简单的力学问题.

【例 1】 长距离自由落体. 试求彗星在万有引力作用下从距太阳 a 处到 b 处所用的时间,其中 $a > b \gg R$,R 为太阳半径.

解: 质量为 m 的彗星在质量为 m' 的太阳的引力 $-Gm'm/z^2$ 的作用下运动,因为 $z \gg R$,所以在长距离尺度上作一维"自由落体". 运动微分方程为

$$m\ddot{z} = -G\frac{m'm}{z^2}. \tag{1}$$

给(1)式两边同乘以 $\mathrm{d}z$ 得

$$m\ddot{z}\,\mathrm{d}z = -G\frac{m'm}{z^2}\mathrm{d}z, \tag{2}$$

积分(2)式,并利用初始条件 $t=0$ 时,$z=a$,$\dot{z}=0$,得到

$$\frac{1}{2}m\dot{z}^2 = Gm'm\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{a}\right). \tag{3}$$

此式亦可直接写出,因为移项后就表示了能量守恒.

从(3)式有 $\dot{z} = -\sqrt{2Gm'\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{a}\right)}$,其中根号前的(−)号源于所选择的 z 轴方向与运动方向相反[见方程(1)]. 所以

$$t=\frac{-1}{\sqrt{2Gm'}}\int_a^b\sqrt{\frac{az}{a-z}}\mathrm{d}z, \tag{4}$$

令 $z=a(1-x^2)$，$\mathrm{d}z=-2ax\mathrm{d}x$，则(4)式变为

$$t=\sqrt{\frac{2a^3}{Gm'}}\int_0^{\sqrt{1-b/a}}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x, \tag{5}$$

将积分公式 $\int\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{4}\arcsin x$ 用于(5)式中的积分，从而得到所求时间为

$$t=\sqrt{\frac{a^3}{2Gm'}}\left(\frac{b}{a}\sqrt{1-\frac{b}{a}}+\frac{1}{2}\arcsin\sqrt{1-\frac{b}{a}}\right). \tag{6}$$

当 $b\ll a$ 时，(6)式简化为 $t\approx\sqrt{\pi^2a^3/32Gm'}$. 例如，取 $a=50\ 000$ AU 和 $b=1$ AU(1 AU = $1.495\ 978\ 7\times10^{11}$ m)，则 $t\approx4\times10^{13}$ s$\approx1.3\times10^6$ a.

【例 2】 用一轻绳竖直系着一质量为 m'、圆半径为 R 的光滑大环，其上套着两个质量均为 m 的光滑小环. 设小环以静止状态从大环顶部滑下. 求证大环可上升的条件为 $m\geqslant\frac{3}{2}m'$，并求大环开始上升时小环所处的位置.

解：受力分析如图 1.12 所示. 设一个小环给大环的作用力为 $-F_N$，则大环处于力平衡状态时

$$F_T=2F_N\cos\theta+m'g. \tag{1}$$

小环的运动微分方程为

$$mg\cos\theta-F_N=mR\dot{\theta}^2, \tag{2}$$

$$mg\sin\theta=m\ddot{R}\theta. \tag{3}$$

积分(3)式并利用初始条件 $\theta=0$ 时，$\dot{\theta}=0$，得到

$$mg(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}mR\dot{\theta}^2. \tag{4}$$

将(4)式代入(2)式，得出 $F_N=mg(3\cos\theta-2)$，将此 F_N 代入(1)式，得

$$F_T=2mg(3\cos\theta-2)\cos\theta+m'g. \tag{5}$$

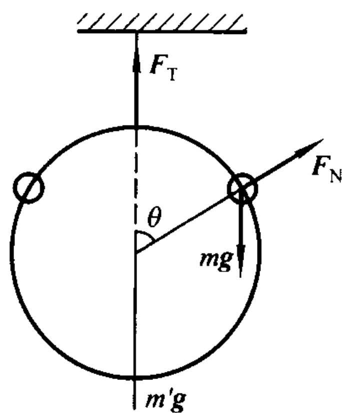


图 1.12

当 $F_T\leqslant0$ 时大环可上升，将 $F_T=0$ 代入(5)式，得到关于 $\cos\theta_0$ 的二次代数方程式，其解为

$$\cos\theta_0=\frac{1}{3}\left(1\pm\sqrt{1-\frac{3m'}{2m}}\right). \tag{6}$$

有此解的条件为 $1-\frac{3m'}{2m}\geqslant0$，即 $m\geqslant\frac{3}{2}m'$ 为大环可上升的条件. (6)式中取(+)号表示了大环开始上升时小环所处的角度所满足的关系式.

【例 3】 某质点沿如图 1.13 所示的摆线 $s=4R\sin\varphi$ 运动，其中 R 为圆的半径，φ 为轨道切线与 x 轴的夹角. 如果 $\dot{\varphi}$ 为常量，试求该质点的加速度量值.

解：摆线是指圆周沿 x 轴纯滚动时其上一点 $P(x,y)$ 的轨迹，

$$x=R(\theta-\sin\theta), \tag{1}$$

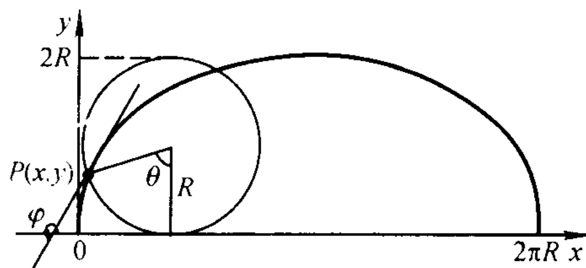


图 1.13

$$y=R(1-\cos\theta). \tag{2}$$

$\mathrm{d}s=\left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\theta=2R\sin\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta$,并选择坐标原点的 $\theta=0$,得到

$$s(\theta)=4R\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right).$$

而切线斜率 $\tan\varphi=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\cot\frac{\theta}{2}=-\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)$. 取 $\varphi=\frac{3}{2}\pi-\frac{\theta}{2}$,当 θ 从 0 增加到 2π 时,φ 从 $\frac{3}{2}\pi$ 减少到 $\frac{1}{2}\pi$. 将 $\frac{\theta}{2}=\frac{3}{2}\pi-\varphi$ 代入(3)式便得到了 $s(\varphi)=4R\sin\varphi$.

在本题中,因为轨道方程 $s(\varphi)$ 已知,所以采用自然坐标系. 由 $s=4R\sin\varphi$ 得

$$v=\dot{s}=4R\dot{\varphi}\cos\varphi,$$
$$a_t=\dot{v}=-4R\dot{\varphi}^2\sin\varphi.$$

再由 $\rho=\mathrm{d}s/\mathrm{d}\varphi=4R\cos\varphi$ 得

$$a_n=\frac{v^2}{\rho}=4R\dot{\varphi}^2\cos\varphi.$$

最后得加速度

$$\boldsymbol{a}=-4R\dot{\varphi}^2\sin\varphi\boldsymbol{e}_t+4R\dot{\varphi}^2\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_n,$$

其量值

$$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=4R\dot{\varphi}^2.$$

[讨论]虽然 a_t 和 a_n 均不是常量,即质点沿切向和法向的加速度是其位置的函数,但是 a 是常量.

【例 4】 设有总长为 l、单位长质量为 ρ 的一列小方块,方块之间用轻短绳相连. 起始时排列放置在桌面上,右端正好排到桌缘,小方块与桌面的动摩擦因数为 μ. 然后用一恒力 F 沿水平方向从左端推动这列方块,求当左端刚好达到桌缘时这列方块的速度.

解: 如图 1.14 所示,水平方向和竖直方向两个变质量方块串的运动方程分别为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho x\dot{x})=\rho x\mu g-F-F_{T1}, \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho y\dot{y})=\rho yg-F_{T2}, \tag{2}$$

在转角处,微元 $\rho\mathrm{d}l$ 满足

$$\rho\mathrm{d}l\,\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{F}_N+F_{T1}\boldsymbol{i}+F_{T2}\boldsymbol{j}, \tag{3}$$

当 $\rho\mathrm{d}l\to0$ 时,方程(3)给出 $T_1=T_2=F_N/\sqrt{2}$. 将此结果代入方程(1)和(2),并相减得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(y\dot{y}-x\dot{x}\right)=gy-x\mu g+\frac{F}{\rho},\qquad(4)$$

将约束条件 $x+y=l$ 代入方程(4)得

$$\ddot{y}=\left(\frac{F}{\rho l}-\mu g\right)+(1+\mu)\frac{g}{l}y.\qquad(5)$$

给(5)式两边同乘以 $\mathrm{d}y$ 再作积分，并利用初始条件 $t=0$ 时，$y=0$，$\dot{y}=0$，得到

$$\dot{y}^2=2\left(\frac{F}{\rho l}-\mu g\right)y+(1+\mu)\frac{g}{l}y^2.\qquad(6)$$

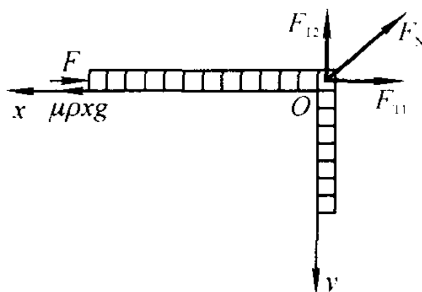


图 1.14

将 $y=l$ 代入(6)式，得到所有小方块刚好全部下垂时的速度为

$$\dot{y}=\sqrt{2F/\rho+(1-\mu)gl}.\qquad(7)$$

*§1.9 等离子体中带电粒子的运动

本节再讨论一个有实际意义的力学问题——带电粒子在电磁场中的运动．地球是一个磁体，周围有地磁场存在．地球的大气层中有电离层，由大量的带电粒子(电子、正离子、负离子)所构成．从宏观尺度来看，这些带电粒子的正负总电荷量正好相等．电离层中的电离气体又可称为**等离子体**．

太阳也是由等离子体构成的，不断从太阳吹向地球的所谓“太阳风”，实际就是带电粒子流，这些带电粒子受到地磁场的作用时，形成丰富的物理现象，例如北极光的形成就与此有关．

近年来，受控核聚变的研究取得不少进展，设计受控磁约束聚变装置必须充分了解带电粒子在电磁场中的运动规律．

本节从牛顿力学方程出发，分析单个粒子的运动规律，得到带电粒子在电磁场中运动的一些基本特征．

电荷量为 q，质量为 m 的带电粒子在电磁场中的运动方程为

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}(t)=q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+q\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t),\qquad(9.1)$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 为粒子的位置矢量，$\boldsymbol{E}$ 是电场强度，$\boldsymbol{B}$ 是磁感应强度．

带电粒子在地磁场中运动时，还会受到其他外力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t)$ 如万有引力等的作用．假定其他外力对带电粒子的作用远小于电磁场的作用，我们可把它略去．

下面逐步分析带电粒子在电磁场中的运动规律．

(1) 均匀恒定磁场中的带电粒子

带电粒子在恒定磁场中的运动所满足的牛顿方程为

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}(t)=q\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times\boldsymbol{B},\qquad(9.2)$$

把恒定磁场 $\boldsymbol{B}$ 的方向取作直角坐标的 z 轴的正向，即 $\boldsymbol{B}=B\boldsymbol{k}$．于是

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=\frac{q}{m}(\dot{\boldsymbol{r}}\times B\boldsymbol{k}),\tag{9.3}$$

把 $\boldsymbol{k}$ 点乘上式,便可得到:

$$\boldsymbol{k}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}=\ddot{z}(t)=0.\tag{9.4}$$

这表明

$$\dot{z}(t)=\text{常量},\tag{9.5}$$

即带电粒子沿 z 轴方向的速度分量不变,原因是洛伦兹力的方向垂直于 $\boldsymbol{B}$,于是平行于磁场方向运动的带电粒子并不受力,所以这一速度分量不发生变化.

其次,将 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 点乘(9.2)式,我们得到

$$m\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2\right)=0,\tag{9.6}$$

于是

$$T=\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2=\text{常量}.\tag{9.7}$$

这意味着,由于磁场 $\boldsymbol{B}$ 对带电粒子的作用力始终与粒子的速度正交,它不对带电粒子作功,因而粒子的动能守恒.

由于 $\dot{\boldsymbol{r}}^2=v_{/\!/}^2+v_{\perp}^2$,这里 $v_{/\!/}$ 和 $v_{\perp}$ 分别是平行于磁场和垂直于磁场的速度分量,因而粒子的动能 T 可以分成两部分:

$$T=\frac{1}{2}mv_{/\!/}^2+\frac{1}{2}mv_{\perp}^2=\text{常量}.\tag{9.8}$$

既然由(9.5)式知 $v_{/\!/}=\dot{z}$ 为常量,于是由(9.8)式得出

$$v_{\perp}=\text{常量},\tag{9.9}$$

即粒子垂直于磁场方向的速度分量 $v_{\perp}$ 的大小也不变.

把(9.3)式的分量方程写出,有

$$\begin{cases}\ddot{x}(t)=\Omega\dot{y}(t),\\ \ddot{y}(t)=-\Omega\dot{x}(t),\\ \ddot{z}(t)=0;\end{cases}\tag{9.10}$$

式中

$$\Omega=\frac{qB}{m}\tag{9.11}$$

称作粒子的**回旋频率**,它是等离子体物理学中一个重要的特征量.

(9.10)式虽然是从非相对论性的牛顿力学导出的,但在相对论力学情况下,只要把 m 取作粒子的相对论质量,它仍然成立.

我们下面来求带电粒子的运动轨迹. 把方程(9.10)的前两个方程分别对时间再求导一次,就可得到下列两个方程:

$$\begin{cases} \dddot{x}(t)+\Omega^2\dot{x}(t)=0, \\ \dddot{y}(t)+\Omega^2\dot{y}(t)=0; \end{cases} \tag{9.12}$$

其解为

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=v_{\perp}\cos(\Omega t+\alpha), \\ \dot{y}(t)=-v_{\perp}\sin(\Omega t+\alpha), \end{cases} \tag{9.13}$$

式中 α 是任意常量.

把(9.13)中的两式对时间再积分一次,得到粒子的轨迹方程为

$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{v_{\perp}}{\Omega}\sin(\Omega t+\alpha)+x_0, \\ y(t)=\dfrac{v_{\perp}}{\Omega}\cos(\Omega t+\alpha)+y_0. \end{cases} \tag{9.14}$$

把(9.10)式中的第三个方程对时间积分两次后得到

$$z(t)=v_{/\!/}t+z_0. \tag{9.15}$$

(9.14)式表示带电粒子垂直磁感线作横向的匀速圆周运动;(9.15)式表示带电粒子沿磁场方向作匀速直线运动.

如果观察者站在一个运动的平面

$$z(t)=v_{/\!/}t+z_0 \tag{9.16}$$

上来观察,那么他看到的带电粒子的运动轨迹是一个以(x_0,y_0)为圆心的圆,这个圆心称作**带电粒子的引导中心**. 圆的半径

$$r_{\perp}=v_{\perp}/|\Omega|=v_{\perp}m/|q|B \tag{9.17}$$

称作**回旋半径**. 在同样的磁场中,即 B 一定时,由于电子质量远小于离子质量,于是当两者的 $v_{\perp}$ 相等时,电子的回旋半径远小于离子的回旋半径.

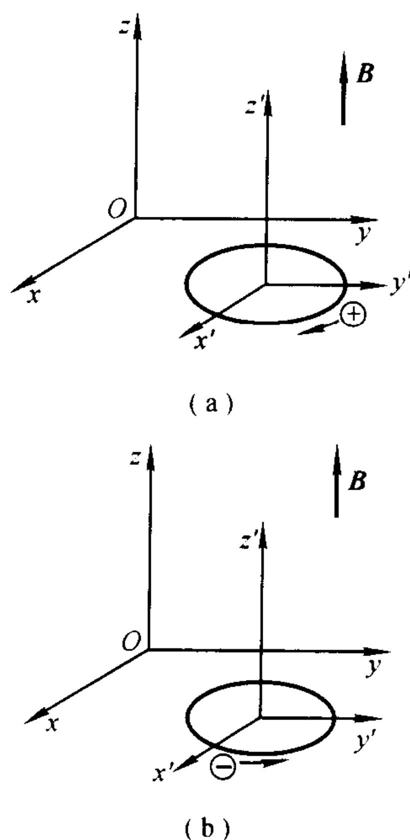


图 1.15

由于 Ω 与 q 成正比,于是在(9.14)式中,带电粒子的回旋方向与 q 的正负有关,正电粒子与负电粒子的回旋方向相反(参看图 1.15).

对于静止的观察者,带电粒子绕磁感线作螺旋运动,其轨迹形成一个螺旋管(参看图 1.16).

由于无论正电粒子还是负电粒子,作回旋运动时所感生的磁场总是与外加磁场 $\boldsymbol{B}$ 的方向相反,因而等离子体是一种具有逆磁性的介质.

(2) 在均匀恒定电磁场中的带电粒子

现在讨论不仅有恒定磁场 $\boldsymbol{B}$,而且还有恒定电场 $\boldsymbol{E}$ 存在的情况. 此时带电粒子将同时受到电场和磁场的作用,它的运动轨迹就比较复杂.

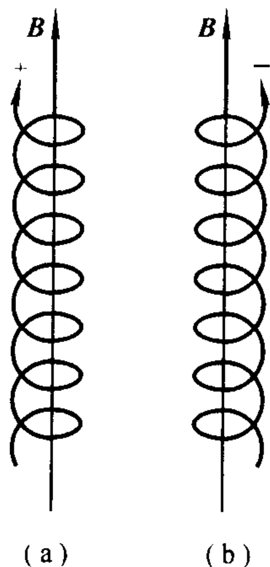


图 1.16

我们限于讨论均匀磁场和均匀电场的情况. 仍把直角坐标的 z 轴取作沿磁场 $\boldsymbol{B}$ 的方向,而把电场 $\boldsymbol{E}$ 分解为沿 $\boldsymbol{B}$ 方向的分量 $\boldsymbol{E}_{/\!/}$ 和垂直于 $\boldsymbol{B}$ 的分量 $\boldsymbol{E}_{\perp}$,再把直角坐标的 y 轴取作沿 $\boldsymbol{E}_{\perp}$ 的方向,于是

$$\begin{cases}\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{E} = E_{\perp}\boldsymbol{j} + E_{/\!/}\boldsymbol{k}.\end{cases} \tag{9.18}$$

这样,牛顿力学方程(9.1)的 z 方向分量方程成为

$$m\ddot{z}(t) = qE_{/\!/}, \tag{9.19}$$

把方程(9.19)对时间积分一次后得到

$$\dot{z}(t) = \frac{qE_{/\!/}}{m}t + v_{0z}, \tag{9.20}$$

式中 v_{0z}是初速度沿 z 轴的分量,(9.20)式表示沿磁场方向,粒子作匀加速运动.

既然沿 z 轴方向的粒子运动情况已经了解,为了简化讨论,从现在开始,假定 $E_{/\!/}=0$,于是,我们只讨论

$$\begin{cases}\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{E} = E\boldsymbol{j}\end{cases} \tag{9.21}$$

的情况,这样(9.1)的 x、y 方向的分量方程成为

$$\begin{cases}\ddot{x}(t) = \Omega\dot{y}(t), \\ \ddot{y}(t) = -\Omega\dot{x}(t) + \dfrac{q}{m}E.\end{cases} \tag{9.22}$$

把(9.22)对时间再求一次导数,可以得到

$$\begin{cases}\dddot{y}(t) + \Omega^2\dot{y}(t) = 0, \\ \dddot{x}(t) + \Omega^2\dot{x}(t) = qE\Omega/m.\end{cases} \tag{9.23}$$

其解为

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = v_{\perp}\cos(\Omega t + \alpha) + \dfrac{E}{B}, \\ \dot{y}(t) = -v_{\perp}\sin(\Omega t + \alpha),\end{cases} \tag{9.24}$$

式中 $v_{\perp}$ 与 α 是由粒子初始条件确定的常量,其物理意义与(9.13)式相同.

把(9.24)与(9.13)式比较后可以看出,粒子除了围绕其引导中心作圆周运动外,它的引导中心还沿着 x 轴方向漂移,漂移速度为

$$v_E = \frac{E}{B}, \tag{9.25}$$

可以把上式改写成矢量形式,即

$$\boldsymbol{v}_E = \frac{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}}{B^2}. \tag{9.26}$$

由(9.26)式可见,引导中心的漂移速度不仅垂直于 $\boldsymbol{B}$,而且垂直于 $\boldsymbol{E}$. 更要注意的一点是 $\boldsymbol{v}_E$ 与 q 无关,即带电粒子的漂移速度与电荷的正负和数值无关. 因而在等离子体中,电子与离子的引导中心将以同样的漂移速度运动.

要实现受控核聚变,必须把等离子体加热到 10^8℃ 的高温,怎样才能使这么高温度的等离子体聚集不散呢? 一条重要的途径就是利用磁场来约束带电粒子. 前面的讨论表明,带电粒子绕均匀磁场的磁感线作螺旋运动,因而确实可以利用磁场来约束等离子体. 然而当等离子体中由于局部电中性被破坏而出现电场时,引导中心将发生横越磁场的漂移. 此外,磁场的不均匀性和随时间变化也会引起引导中心的漂移. 磁场约束装置设计的一个重要任务就是要克服带电粒子因这些漂移运动而引起的损失. 除了考虑单个带电粒子的运动外,还需要研究带电粒子间相互作用的集体效应,这就要用流体力学来进行分析,读者可进一步参阅有关的书籍.

习 题

1.1 质量为 m 的质点,约束在半径为 r 的光滑半球形碗的内壁运动. 试应用牛顿第二定律分别用直角坐标、柱坐标和球坐标写出质点运动的微分方程.

1.2 写出约束在铅直平面内的光滑摆线

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta), \\ y = -a(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

上运动的质点的微分方程,并证明该质点在平衡位置附近作振动时,振动周期与振幅无关.

***1.3** 证明单摆的振动周期

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}},$$

并作变数代换 $\sin\frac{\theta}{2}\Big/\sin\frac{\theta_0}{2} = \sin\varphi$,得

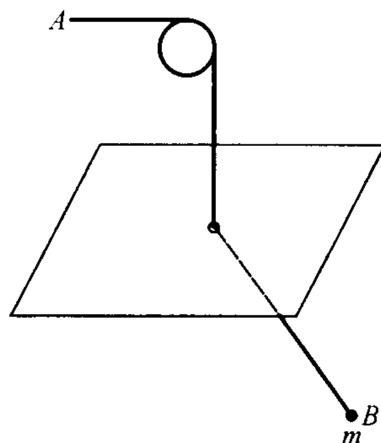
$$\begin{aligned} T &= 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1 - K^2\sin^2\varphi}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\Big[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 K^2 + \left(\frac{1\times 3}{2\times 4}\right)^2 K^4 + \cdots + \\ &\quad \left(\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times 2n}\right)^2 K^{2n} + \cdots\Big], \end{aligned}$$

式中 $K^2=\sin^2\frac{\theta_0}{2}$，$\theta_0$ 为摆偏离平衡位置的最大角度.

1.4　一光滑的杆在水平面上绕其上的一点 O 以等角速度 ω 转动，一质点被约束在杆上自由运动. 已知 $t=0$ 时，质点离 O 点的距离为 b 并相对于杆静止. 试求质点的运动规律和杆对质点的作用力.

1.5　若地球总质量不变，但半径发生变化 ΔR. 试求由此引起的地球表面的重力加速度 g 的改变.

1.6　质量为 m 的质点系在一轻而无弹性的绳子的 B 端，绳的另一端 A 穿过小孔. 质点被限制在一铅直平面内运动. 若以等速拉绳的 A 端，试应用牛顿第二定律写出质点的运动方程.



题 1.6 图

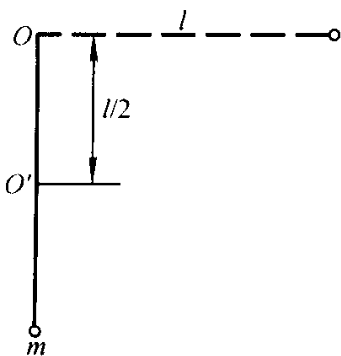
1.7　一质点以恒定速率沿一曲线运动. 证明该质点的速度 $\boldsymbol{v}$ 始终与加速度 $\boldsymbol{a}$ 垂直.

***1.8**　设质点在平面内运动的加速度的切向分量和法向分量都是常数，证明质点的轨道为对数螺线.

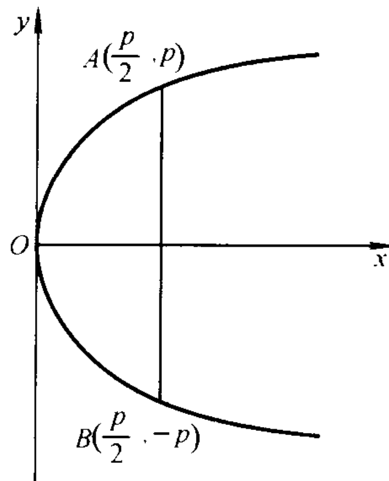
1.9　一质点用一轻的弹性绳系于固定点 A，绳子的固有长度为 l_1，平衡时绳的长度为 l_1+l_2. 设质点由 A 点从静止开始自由下落，不计空气阻力，写出质点的运动方程，并求质点自 A 点落至最低点 D 所需要时间和 A、D 间的距离.

1.10　质量为 m 的小球，系于长为 l 的无弹性的轻绳端点上，绳的另一端挂于 A 点. 若小球以等速率沿水平圆周轨道运动，绳子与铅直线的夹角为 α，求小球的速率 v、绳子的张力 F_T 和小球运动一周所需的时间.

***1.11**　质量为 m 的质点用长为 l 的轻绳悬挂于 O 点，开始时质点和 O 点在同一水平线上，距 O 点为 l，然后从静止状态下落. 在 O 点正下方 $l/2$ 处有一钉子 O'，质点在到达最低点时绳子和 O' 相碰. 问：(1) 质点在整个运动过程中能量是否守恒，并说明其理由；(2) 质点在经过最低点后，最高可上升到何处？



题 1.11 图



题 1.12 图

1.12　如图所示，一质点沿着抛物线 $y^2=2px$ 运动，其切向加速度恒为法向加速度的 α

倍. 设质点经过正焦弦的一端 A 点时的速度为 u，求质点到达正焦弦另一端 B 点时的速度.

1.13　质点 A 约束在光滑水平平台上运动，在此质点上系着一根长为 l 的轻绳，绳子穿过平台上的小孔，另一端垂直地挂着另一个质点 B. (1) 问此力学体系的动量、角动量、能量是否守恒，并解释之；(2) 用质点系动量定理写出体系的运动微分方程；(3) 若 $t=0$ 时，质点 A 离 O 的距离为 a，速度为 $v_0=\sqrt{\frac{9ag}{2}}$，其方向垂直于 OA，且 $m_A=m_B=m$，证明以后质点 A 离 O 点的距离始终在 a 和 $3a$ 之间.

*__1.14__　同上题，但平台和水平面成 θ 角，讨论质点 A 的运动情况.

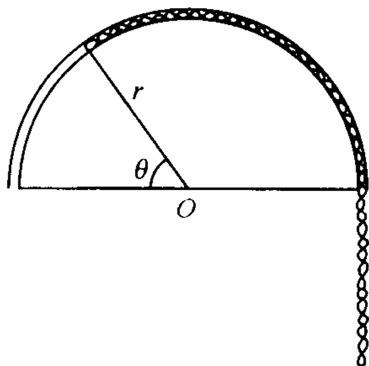
1.15　一门大炮的炮车停在铁轨上，炮弹质量为 m，炮身及炮车质量为 m'，炮车可以无摩擦地在铁轨上运动. 如果炮身与地面成一角度 α，炮弹对炮身的相对速度为 v_r，试求炮弹离开炮身时对地面的速度 v 及炮车的反冲速度 u.

1.16　动量定理、角动量定理和动能定理共有 7 个方程式，这是否意味着对于任一个力学体系，我们永远可以从这三个定理中得到 7 个独立的运动微分方程？

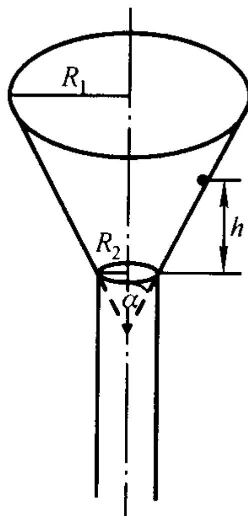
1.17　在光滑的水平面上有两个质量各为 m_A 和 m_B 的质点，它们用一根长为 l 的轻棒联系着，在 $t=0$ 时，质点 A 静止，质点 B 的速度为 v_0，方向垂直于 AB，用同一组坐标写出此力学体系的动量、角动量和动能的表示式，并讨论其以后的运动情况.

*__1.18__　三个完全刚性的球，质量分别为 m_1、m_2 和 m_3，静止于一水平直线上，沿此直线方向给第一个球以速度 v_1. 设 m_1、m_3 和 v_1 为已知，试求第二球的质量为何值时，才能使第三球经过一次碰撞后所得速度最大？

1.19　在铅直平面内有一光滑的半圆形管道（见图），半径为 r，管道内有一长为 πr，质量为 $\rho\pi r$ 的链条. 假定链条由于轻微扰动而从管口向外滑出，试用角动量定理求出链条位于任一角度 θ 时的速度 v.



题 1.19 图



题 1.20 图

1.20　一质量为 m 的质点约束在对称轴为铅直线，半顶角为 α 的圆锥形漏斗的内表面运动. 漏斗的上底半径为 R_1，下底半径为 R_2. 开始时质点具有水平方向的初速度 v_0，离下底的高度为 h（见图），在运动过程中摩擦力可忽略不计. 试问质点能飞出漏斗之外，落入漏

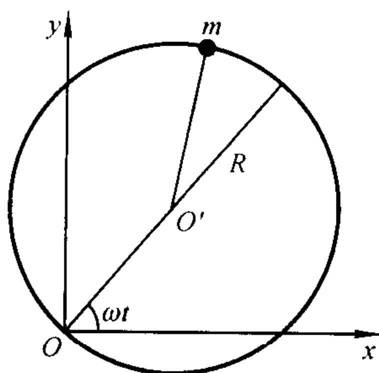
斗下面和在漏斗内作圆周运动三种情况下 v_0 和 h 各应满足什么关系？

1.21　质量为 m 的质点沿一半球形光滑碗的内侧以初速 v_0 沿水平方向运动，碗的内半径为 r，初位置离碗缘的高度为 h. 求质点上升到碗口边缘而又不至于飞出碗外时 v_0 和 h 所应满足的关系式.

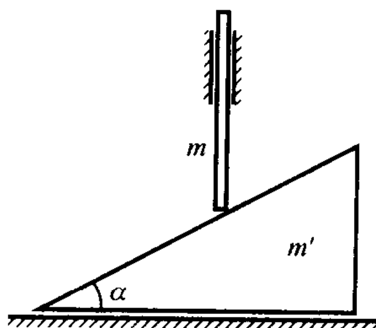
1.22　质量为 m'，半径为 R 的半球，其底平面放在光滑的水平面上，质量为 m 的质点沿此半球面滑下，设质点的初始位置与球心的联线和铅直线成 α 角，并且开始时系统是静止的. 试求质点绕球心运动的角速度.

1.23　总长度为 L 的软链放在水平光滑的桌面上，此时长为 l 的一部分链条从桌上下垂，起始时链条是静止的，求当链条的末端滑到桌子边缘时链的速度 v 和所需的时间.

1.24　质量为 m 的小球串在半径为 R 的光滑圆环上，并可沿圆环自由滑动. 如环在水平面内以等角速度 ω 绕环上一点 O 转动，写出小球的运动方程.



题 1.24 图

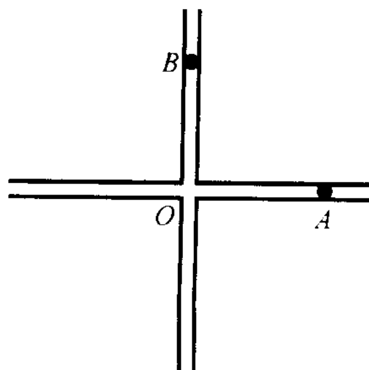


题 1.25 图

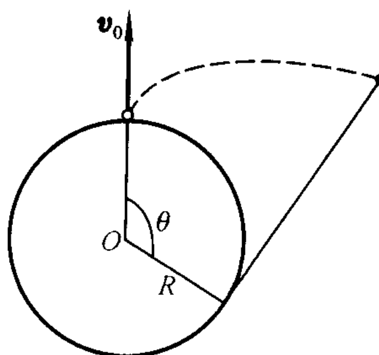
1.25　质量为 m 的直杆可以自由地在固定铅直套管中运动，杆的下端搁在质量为 m'，倾角为 α 的光滑直角劈上，劈放在光滑的水平面上，求杆和劈的加速度.

1.26　质量为 m'的滑块和一劲度系数为 k、质量为 m 的弹簧相连. 假定弹簧的质量不能忽略，其形变可以看成是均匀的，求此体系的振动频率.

1.27　在水平面上有两根垂直相交（如图所示）的光滑细管，管内分别放置两个质量均为 m，电荷分别为 $+e$ 和 $-e$ 的质点 A 和 B. 设 $t=0$ 时，质点 A 静止于作为 x 轴的管中，离交点 O 的距离为 a；质点 B 位于交点 O，且具有和 AO 垂直的速度 v_0. 问这两质点有哪些守恒量，



题 1.27 图

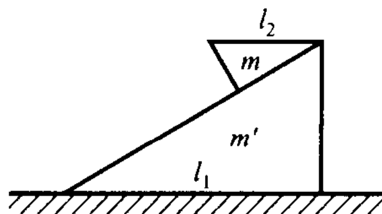


题 1.28 图

并讨论它们以后的运动情况.

1.28 光滑水平面上有一质量为 m 的质点,用一轻绳系着,绳子完全绕在半径为 R 的圆柱上,使质点贴在圆柱体的边上. $t=0$ 时给质点以一径向速度 v_0. 试问在以后的运动过程中:(1)质点的能量和对圆柱轴线的角动量是否守恒? (2) 绳子的张力随时间怎样变化?

1.29 质量分别为 m 和 m',倾角均为 α 的光滑直角劈,开始时静止在光滑水平面上,其相对位置如图所示. m'劈水平边的长为 l_1, m 劈水平边的长为 l_2,求 m 劈下滑至底端时 m'劈移动的距离和所需的时间.



题 1.29 图

*1.30** 垂直的粗糙圆环上套有一个小球,两者之间的摩擦因数为 μ. 设开始时小球和环的中心在同一水平位置上,小球从静止开始下滑至最低点时小球停止运动,求 μ 的大小.

*1.31** 求计入重力后的密歇尔斯基方程的解.

*1.32** 假定雨滴下落时的形状为球形,其质量增加率与它的表面积成正比. 求雨滴下落时速度和时间的关系.

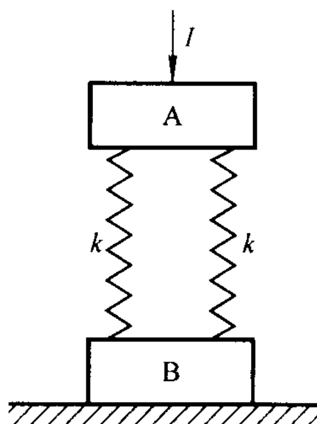
*1.33** 质量为 m 的物体系以软链,沿倾角为 α 的光滑斜面下滑,每单位长度链的质量为 ρ. 设开始时物体静止于斜面的顶端,求物体下滑的距离和速度的关系.

*1.34** 一轻绳跨过定滑轮的两端,一端挂着质量为 m 的重物,另一端和一线密度为 ρ 的软链连接. 开始时软链全部静止在地上,重物亦静止,后来重物开始下降,并将软链向上提起. 问软链最后可提起多高?

1.35 总质量为 m_0、自重为 m 的火箭垂直发射,设废气相对火箭的速度为 v_r,单位时间消耗的燃料为 km_0, k 为常数. (1) 证明:只有当 $kv_r > g$ 时,火箭才能起飞;(2) 求火箭能达到的最大速度和上升的最大高度.

*1.36** 求下列两种情况下,质点沿同一轨道运动时所经历的时间之比:(1) 在同一势场中两个不同质量的质点;(2) 同一质点,但势能乘上一个常数 α.

*1.37** 质量相同的两个物体 A 和 B 用弹簧连接(如图所示),垂直地置于地上,原来静止. 现给物体 A 以冲量 I,问 I 要多大才可使 B 跳起来?



题 1.37 图

*1.38** 两个质量皆等于 m'的人站在两个无弹性的质量等于 m 的称盘上,两盘用一条经过一定滑轮的绳挂起来. 两人之一在地面上跳高时能使其重心升高 h,问此人用相同的能量在称盘上跳高时,其重心能升高多少?

第二章　拉格朗日方程

本章叙述经典力学拉格朗日形式的基本理论,以便和牛顿力学方程一起用于讨论后面各章的各种具体力学问题. 我们不采用传统的从力学变分原理导出拉格朗日方程的方法,而直接从牛顿第二定律来导出拉格朗日方程,包括最常用的理想、完整体系的拉格朗日方程,非完整体系的拉格朗日方程(λ 乘子法)和带电粒子在电磁场中运动的拉格朗日方程. 静力学问题则作为拉格朗日方程应用的一个特例来处理. 本章最后讨论了经典力学中的守恒定律和时空对称性的关系.

§2.1　理想约束　达朗贝尔方程

在§1.3中我们曾经指出,对于由 n 个质点所组成的受到 k 个约束条件的质点系,直接用牛顿第二定律来解动力学问题时,由于方程中出现了 k 个约束力,未知函数有 $3n+k$ 个. 因此除了由牛顿第二定律所给出的 $3n$ 个二阶微分方程外,还需要补充 k 个约束方程才能求解. 具体求解这 $3n+k$ 个方程时,常常先用代数方法消去方程中的 k 个约束力,并利用 k 个约束方程,再消去 k 个不独立坐标,使未知函数从 $3n+k$ 个减少到 $3n-k$ 个,再着手解剩下来的 $3n-k$ 个方程. 以§1.3中图1.7的问题为例,最先列出的方程有4个:

$$m(\ddot{R}-R\dot{\varphi}^2)=-F_{\mathrm{T}}, \tag{1}$$

$$m(R\ddot{\varphi}+2\dot{R}\dot{\varphi})=0, \tag{2}$$

$$m'\ddot{z}=F_{\mathrm{T}}-m'g, \tag{3}$$

$$R-z=l. \tag{4}$$

求解时,先由(1)、(3)二式消去约束力 F_{T},并将(4)代入(3)消去 z(或 R),得到

$$(m+m')\ddot{R}-mR\dot{\varphi}^2+Mg=0, \tag{5}$$

$$m(R\ddot{\varphi}+2\dot{R}\dot{\varphi})=0. \tag{6}$$

这两个方程是我们真正要解的动力学方程,约束力和不独立坐标均已消去. 这个例子只有1个约束力,因此从 $3n+k$ 个方程约化为 $3n-k$ 个方程的运算并不复杂. 如果 n 和 k 的数目较大,这样的运算可能就很繁琐. 那么能否像质点系动量定理和角动量定理可使内力在动力学方程中不出现那样,建立一种新形

式的，约束力和不独立坐标不出现的动力学方程，使写出来的方程直接就是实际要解的 $3n-k$ 个微分方程呢？本章我们就来讨论这个问题．在这一节中我们先讨论如何使动力学方程中不出现约束力的问题，为此先要引进**虚位移**和**理想约束**两个概念．

质点按动力学规律 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 运动时，在 $\mathrm{d}t$ 时间内实际所发生的位移称为**实位移**，用 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 表示．以前我们都是在这一意义下使用 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 这一符号的．想象在某一时刻 t，质点发生一个约束所许可的无限小位移，这一位移不是由于质点实际的运动所产生的，它不需要时间，只要满足质点在此时刻的运动学约束条件即可．这种位移称为**虚位移**，用 $\delta\boldsymbol{r}$ 表示．算符 δ 的运算规则是：作用在空间坐标上时和微分算符 d 的运算规则一样，作用在时间 t 上则为零，即 $\delta t=0$．因此 $\delta\boldsymbol{r}$ 有时也称为**等时变分**．

一般来说，在任一瞬时，质点的虚位移可以不只一个．譬如质点被约束在一曲面上，那么只要不离开此曲面，质点可以在各个方向上发生虚位移．实位移则受到运动定律的限制，当时间改变 $\mathrm{d}t$ 后，实位移只有一个，因为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 是 t 的单值函数．

如果约束稳定，实位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 是许多虚位移中的一个．对于不稳定约束，实位移和虚位移不一致．如图 2.1 所示，约束在曲面上的一个质点，若曲面本身是运动的，那么质点的虚位移 $\delta\boldsymbol{r}$ 处在该时刻质点所在的切平面内，而实位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 不在这一平面内，因而 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 就不是 $\delta\boldsymbol{r}$ 中的一个．

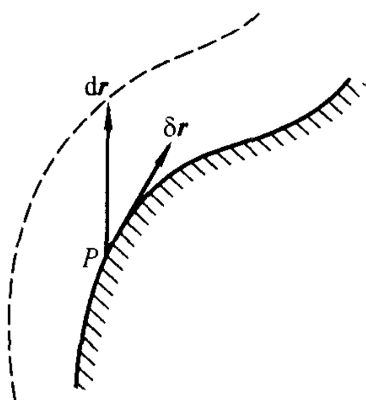


图 2.1

力 $\boldsymbol{F}$ 在虚位移下所作的功称为**虚功**，用 δW 表示：

$$\delta W=\boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{r}. \tag{1.1}$$

有一类理想约束体系，其内外约束力所作的虚功之和可认为是零．我们用 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i}$ 表示第 i 个质点所受到的约束力（包括体系内部的约束力和外界对体系的约束力），那么**理想约束**可定义为：

$$\sum_i \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}i}\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0. \tag{1.2}$$

下列几种约束都是理想约束．

(1) 质点沿光滑曲面运动，如图 2.2 所示．该曲面对质点的约束力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$ 在曲面的法线方向，不论该曲面是静止不变的，还是随时间变化的，质点的虚位移 $\delta\boldsymbol{r}$ 恒在曲面的切线方向．因此

$$\delta W=\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}\cdot\delta\boldsymbol{r}=0.$$

（2）质量可忽略的刚性杆所连接的两个质点．如图 2.3 所示，用 $\boldsymbol{F}_{N1}$ 和 $\boldsymbol{F}_{N2}$ 表示杆作用在质点 P_1 和 P_2 上的约束力，其方向在 P_1P_2 的连线方向，根据牛顿第三定律，$\boldsymbol{F}_{N1}=-\boldsymbol{F}_{N2}$，因此

$$\delta W = \boldsymbol{F}_{N1}\cdot\delta\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{F}_{N2}\cdot\delta\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{F}_{N1}\cdot\delta\boldsymbol{r},$$

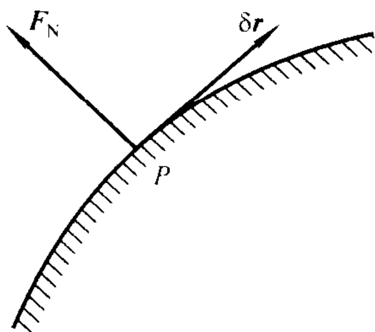


图 2.2

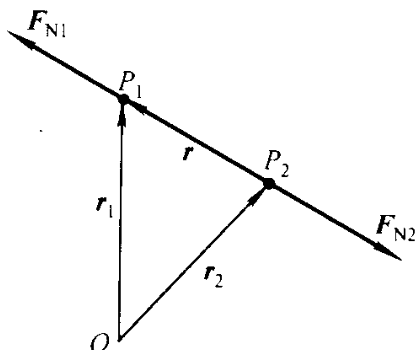


图 2.3

式中 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2=\overrightarrow{P_2P_1}$，对于刚性杆，它是常模矢量，恒有 $\delta\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{r}$，所以 $\delta\boldsymbol{r}$ 也和 $\boldsymbol{F}_{N1}$ 垂直，因此

$$\delta W = \boldsymbol{F}_{N1}\cdot\delta\boldsymbol{r}=0.$$

刚体可以看成任意两点间受到上述形式约束的质点系．

（3）两个刚体以光滑表面接触．如图 2.4 所示，仍用 $\boldsymbol{F}_{N1}$ 和 $\boldsymbol{F}_{N2}$ 表示两个刚体相互间的作用力和反作用力，则 $\boldsymbol{F}_{N1}+\boldsymbol{F}_{N2}=0$．由于两个刚体是光滑的，可有相对滑动，因此 $\delta\boldsymbol{r}_1\neq\delta\boldsymbol{r}_2$．但可以证明 $\delta\boldsymbol{r}_1-\delta\boldsymbol{r}_2$ 在两个刚体接触点的公切面内．而 $\boldsymbol{F}_{N1}$ 和 $\boldsymbol{F}_{N2}$ 都垂直于公切面，因此

$$\begin{aligned}\delta W &= \boldsymbol{F}_{N1}\cdot\delta\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{F}_{N2}\cdot\delta\boldsymbol{r}_2\\ &=\boldsymbol{F}_{N1}\cdot(\delta\boldsymbol{r}_1-\delta\boldsymbol{r}_2)=0.\end{aligned}$$

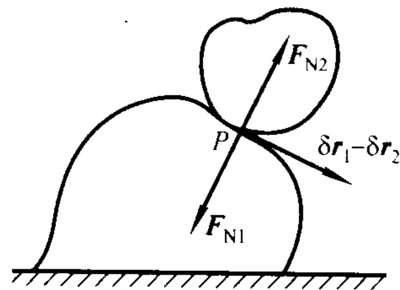


图 2.4

下面证明 $\delta\boldsymbol{r}_1-\delta\boldsymbol{r}_2$ 在两个刚体的公切面内．我们可把 $\delta\boldsymbol{r}_1$ 和 $\delta\boldsymbol{r}_2$ 分解为两部分．一部分是两者没有相对虚位移，只是切平面有一虚位移．我们用 $\delta\boldsymbol{r}$ 表示由切平面的虚位移所产生的切点 P 的虚位移．这一虚位移是两者共同的．另一部分虚位移是在切平面不变动的情况下，两个刚体各自在切平面内的虚位移，我们分别用 $\delta\boldsymbol{r}_1'$ 和 $\delta\boldsymbol{r}_2'$ 表示．于是我们得

$$\delta\boldsymbol{r}_1=\delta\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{r}'_1,\quad \delta\boldsymbol{r}_2=\delta\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{r}'_2.$$

两式相减得

$$\delta\boldsymbol{r}_1-\delta\boldsymbol{r}_2=\delta\boldsymbol{r}'_1-\delta\boldsymbol{r}'_2,$$

由于 $\delta\boldsymbol{r}_1'$ 和 $\delta\boldsymbol{r}_2'$ 都是在公切面内的虚位移，因而 $\delta\boldsymbol{r}_1'-\delta\boldsymbol{r}_2'$ 必定在公切面内，所以 $\delta\boldsymbol{r}_1-\delta\boldsymbol{r}_2$ 也一定在公切面内．

(4) 两个物体以完全粗糙的表面相接触(不能有滑动,只能作纯滚动),此时接触点的相对速度$\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1=0$,约束条件为$\delta\boldsymbol{r}_2-\delta\boldsymbol{r}_1=0$,因此

$$\delta W=\boldsymbol{F}_{N1}\cdot\delta\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{F}_{N2}\cdot\delta\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{F}_{N1}\cdot(\delta\boldsymbol{r}_1-\delta\boldsymbol{r}_2)=0.$$

(5) 两个质点以柔软而不可伸长的绳子相连接. 以§1.3图1.7所示的题为例. 用$\boldsymbol{r}_1$和$\boldsymbol{r}_2$分别表示质点m和m'的位置,则

$$\begin{aligned}\delta W&=\boldsymbol{F}_{T1}\cdot\delta\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{F}_{T2}\cdot\delta\boldsymbol{r}_2\\&=(-F_T\boldsymbol{e}_R)\cdot(\delta R\boldsymbol{e}_R+R\delta\varphi\boldsymbol{e}_\varphi)+F_T\boldsymbol{k}\cdot\delta z\boldsymbol{k}=-F_T\delta R+F_T\delta z.\end{aligned}$$

利用约束条件$R-z=l$,得$\delta R=\delta z$,代入上式即得

$$\delta W=0,$$

如果把更复杂一些的力学体系看成是由一些刚体和质点所组成的,那么从上面的一些例子可以看到,只要物体间的连接是刚性的,所有接触面或是理想光滑,或是绝对粗糙,则任一复杂的力学体系均可看成具有理想约束的体系. 在某些情况下,如果略去介质阻力就不能正确描述现象的物理性质,此时必须放弃理想约束的条件,或者将介质阻力看作未知的主动力,而认为约束仍然是理想的,由于未知介质阻力的出现而缺少的方程则由实验定律来补充.

以后如不作特别说明总是假定一切约束都是理想的.

下面我们讨论如何把约束力全部消去的问题. 以后我们都用$\boldsymbol{F}_N$表示约束力,$\boldsymbol{F}$表示主动力. 受约束的质点系中每一个质点的运动方程可写为:

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i=\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{F}_{Ni},\quad i=1,2,\cdots,n,$$

上式可改写为

$$\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{F}_{Ni}-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i=0,\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{1.3}$$

给体系以虚位移$\delta\boldsymbol{r}_i$,由(1.3)式可得

$$\sum_i(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{F}_{Ni}-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0.$$

如果约束是理想的,则由定义(1.2),上式可写为:

$$\sum_i(\boldsymbol{F}_i-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0. \tag{1.4}$$

这个方程称为**达朗贝尔**(d'Alembert)**方程**,这是理想约束体系动力学的普遍方程,约束力在方程中已不再出现了.

【例】 用达朗贝尔方程写出§1.3中图1.7所示问题的运动方程.

解: 此力学体系仅有m和m'两个质点,取柱面坐标,则

$$\boldsymbol{F}_1=0,\ \boldsymbol{F}_2=-m'g\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{r}_1=R\boldsymbol{e}_R,\ \boldsymbol{r}_2=z\boldsymbol{k}=-(l-R)\boldsymbol{k},$$

$$\delta\boldsymbol{r}_1=\delta R\boldsymbol{e}_R+R\delta\varphi\boldsymbol{e}_\varphi,\ \delta\boldsymbol{r}_2=\delta z\boldsymbol{k}=\delta R\boldsymbol{k},$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_1=(\ddot{R}-R\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{e}_R+(R\ddot{\varphi}+2\dot{R}\dot{\varphi})\boldsymbol{e}_\varphi,\ \ddot{\boldsymbol{r}}_2=\ddot{z}\boldsymbol{k}=\ddot{R}\boldsymbol{k}.$$

将它们代入达朗贝尔方程得

$$\sum_{i=1}^{2}(\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i$$

$$= [mR\dot{\varphi}^2 - (m+m')\ddot{R} - m'g]\delta R - mR(R\ddot{\varphi} + 2\dot{R}\dot{\varphi})\delta\varphi = 0.$$

因为 R 和 φ 是两个独立的坐标,要使上式成立,必须 δR 和 $\delta\varphi$ 的系数分别为零. 由此得

$$\begin{cases}(m+m')\ddot{R} + m'g = mR\dot{\varphi}^2,\\ R\ddot{\varphi} + 2\dot{R}\dot{\varphi} = 0.\end{cases}$$

和以前得出的结果一致.

§2.2 完整约束 广义坐标

上节我们引进了虚位移和理想约束的概念后,把质点系的一般动力学方程写成了不再出现约束力的达朗贝尔方程. 但达朗贝尔方程中的坐标一般仍是不独立的,需要将约束方程代入后经过化简才能得到通常形式的运动微分方程. 从上节所举的一个具体例子来看,化简手续是很烦琐的. 是否有可能把达朗贝尔方程中的不独立坐标全部化为独立坐标呢? 我们将在下节讨论这一问题. 本节先来建立完整约束和广义坐标两个概念.

约束是对自由而言的,是一个纯运动学概念,它强调力学体系在运动时必须满足某些规定的条件. 约束条件必须通过约束方程的形式才能确切的表示出来. 根据约束方程的形式,可对约束进行分类. 上面所讨论的理想约束和非理想约束是一种分类方法. 现在我们要按完整约束和非完整约束进行另一种性质的分类.

完整约束是指约束条件只和体系各质点的坐标 $\boldsymbol{r}_i$ 及时间 t 有关,约束方程可写成

$$f(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_n, t) = 0 \qquad (2.1)$$

的形式. 如果一个力学体系受到的约束都是完整的,那么这个体系称为**完整体系**. 例如图2.5,约束在以角速度 ω 作旋转的细管内的质点,约束方程为 $\theta - \omega t = 0$;

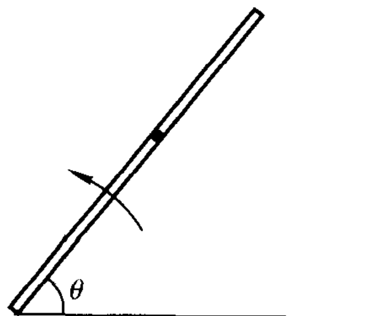


图 2.5

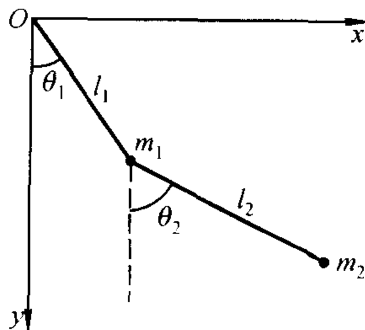


图 2.6

图 2.6 中双单摆的约束条件为 $x_1^2+y_1^2=l_1^2$,$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=l_2^2$,等等.这些约束方程都是(2.1)式的形式,因此都是完整约束.

凡是完整约束,都可以通过约束方程用代数方法将不独立坐标消去. 每一个完整约束方程可以消去一个不独立坐标. 如果一个力学体系有 k 个完整约束条件

$$f_j(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_n,t)=0,\quad j=1,2,\cdots,k, \tag{2.2}$$

则可消去 k 个不独立坐标,留下的独立坐标数为

$$s=3n-k. \tag{2.3}$$

s 称为体系的**自由度**.

如果不能由约束方程直接消去不独立坐标,这种约束称为**非完整约束**. 非完整约束有两种情况. 一种是约束方程中含有坐标和时间的微分,在动力学方程未解出以前,不能通过积分的方法把微分消去. 这种约束也称为**不可积微分约束**. 例如一个恒和地面垂直的轮子在地面上作纯滚动就是这种情况,如图 2.7 所示. 确定一个垂直于地面的轮子在空间的位置要用 4 个坐标,即轮心的坐标 x 和y、轮子轴线与x轴夹角θ、轮子绕自身轴线转过的角度φ. 但由于受到纯

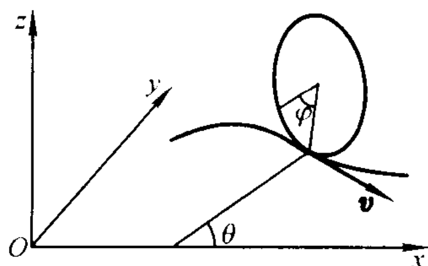


图 2.7

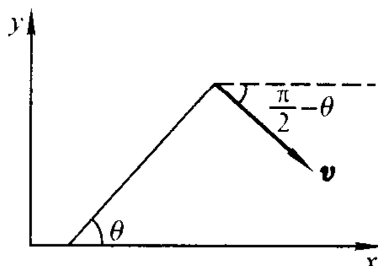


图 2.8

滚动这一条件约束,轮心的速度 $v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$ 和轮子绕对称轴转动的角速度 $\dot{\varphi}$ 之间存在约束关系 $v=r\dot{\varphi}$,r 为轮子半径. 当轮子不是沿直线滚动时,$\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 不仅和 v 的大小直接有关,而且还和滚动的方向即 θ 角有关. 因 $\boldsymbol{v}$ 垂直于轮子的轴线. 而轴线和 x 轴的夹角为 θ,如图 2.8 所示,因此

$$\begin{cases}\dot{x}=v\sin\theta,\\ \dot{y}=-v\cos\theta.\end{cases}$$

将约束方程 $v=r\dot{\varphi}$ 代入上述两式得

$$\begin{cases}\mathrm{d}x-r\sin\theta\mathrm{d}\varphi=0,\\ \mathrm{d}y+r\cos\theta\mathrm{d}\varphi=0.\end{cases} \tag{2.4}$$

上式表明在纯滚动的情况,x、y、θ、φ 这 4 个坐标中独立的坐标只有两个,但在动力学方程未解出前,我们并不能通过积分的办法直接由(2.4)式消去两个不独立坐标. 所以这种约束是非完整约束. 但是如果轮子是沿直线作纯滚动,则仍然是完整约束,因为此时角 θ 是常数,不妨取 $\theta=0$,则方程(2.4)变为

$$\begin{cases} dx = 0, \\ dy + r d\varphi = 0. \end{cases}$$

可直接积分得

$$\begin{cases} x = 常数, \\ y + r\varphi = 常数. \end{cases}$$

这是属于完整约束(2.1)型的约束方程.

另一种非完整约束称为**可解约束**或**单面约束**,其约束方程并不包含坐标和时间的微分,但是包含一个不等式. 例如用长为 l 的柔软不可伸长的绳子悬挂于固定点 O 的质点,其约束方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant l^2,$$

质点不能运动到以 O 为中心,以 l 为半径的球外区域,但质点可在球内自由运动. x、y、z 三个坐标虽然受到上述条件的约束,但并不能由此条件将 x、y、z 这三个坐标中的任何一个用其他两个坐标来表示,因而也不是完整约束. 但是对于这种非完整约束,我们可找出约束方程取等式和不等式的条件:(1) **约束不可解,约束方程取等式**;(2) **移去约束,增加一个独立坐标**. 两种解之间用约束方程取等式和不等式的条件联系起来. 采用这种分段处理的办法,实际上把可解约束从非完整约束中除去. 今后我们讨论非完整约束时专指不可解微分约束而言.

建立一个力学体系的动力学方程所需要的独立坐标称为**广义坐标**. 广义坐标确定了,这个力学体系在空间的位形也就确定了. 从上面的讨论可知. 对于完整约束体系,广义坐标数目和体系的自由度相同. 对于非完整约束体系,广义坐标数目大于体系的自由度,像上面所述的轮子在地面上滚动的例子,广义坐标有 4 个,但自由度只有 2.

需要指出的是,一个力学体系的广义坐标的选取不是唯一的,例如图 2.6 的双单摆,我们可取图中所示的两个角坐标 θ_1 和 θ_2 为广义坐标,也可取直角坐标 x_1、y_1 和 x_2、y_2 中的各一个为广义坐标,还可取 $q_1 = \dfrac{\theta_1 + \theta_2}{2}$ 和 $q_2 = \dfrac{\theta_1 - \theta_2}{2}$,$q_1 = \theta_1$ 和 $q_2 = x_2$……为广义坐标.

s 个独立的广义坐标张开成一个抽象的 s 维空间,称为位形空间,此空间中的一点就代表了力学体系中一种可能的位形.

§2.3 理想、完整体系的拉格朗日方程

直接用广义坐标表示的动力学方程称为**拉格朗日**(J. L. Lagrange, 1736—

1813)**方程**．本节首先讨论体系的约束是理想的和完整的情况．在这种情况下，我们只要将完整约束的条件(2.2)式代入到理想约束体系的动力学普遍方程——达朗贝尔方程(1.4)中去，消去其中的不独立坐标后即得拉格朗日方程．

我们以 $q_1, q_2, \cdots, q_s$ 表示由(2.2)式的 k 个完整约束方程消去 k 个不独立坐标后，留下的 $s=3n-k$ 个独立坐标即广义坐标．只要每一个广义坐标的值确定后，整个体系的位置就完全确定了，体系中每一个质点的位置 $\boldsymbol{r}_i$ 均可用 s 个广义坐标 $q_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,s)$ 及时间 t 来表示：

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \cdots, q_s, t). \tag{3.1}$$

因此，利用上式将达朗贝尔方程中的 $\delta\boldsymbol{r}_i$ 和 $\boldsymbol{r}_i$ 用 q_α 及其微分来表示即可导出理想、完整体系的拉格朗日方程．

$\delta\boldsymbol{r}_i$ 是第 i 个质点的虚位移($\delta t=0$ 的微分算符)．因此，从(3.1)式可得

$$\delta\boldsymbol{r}_i = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha. \tag{3.2}$$

将上式代入达朗贝尔方程，得

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{s}\left[\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\right]\delta q_\alpha = 0.$$

由于广义坐标 q_α 都是独立的，因此要使上式成立，必须使每一项 δq_α 的系数都为零，即要求

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1,2,\cdots,s$$

或

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha, \quad \alpha = 1,2,\cdots,s, \tag{3.3}$$

式中

$$Q_\alpha = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha} \tag{3.4}$$

称为对应于广义坐标 q_α 的**广义力**．(3.3)共有 s 个方程，这 s 个方程和达朗贝尔方程等价．

方程(3.3)的左边可改写为

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n}\left(m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\right) - \sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_\alpha}. \tag{3.5}$$

另一方面，由(3.1)式得

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \cdots, q_s, t) = \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}. \tag{3.6}$$

于是可将动能 T 表示为 q、$\dot{q}$ 的函数：

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2 = T(q_1, q_2, \cdots, q_s; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_s, t). \tag{3.7}$$

由(3.6)和(3.7)可得

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i} \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}, \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i} \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_\alpha} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_\alpha}. \tag{3.9}$$

将(3.8)和(3.9)代入(3.5)得

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha},$$

再代入(3.3)式得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \cdots, s. \tag{3.10}$$

这就是理想、完整体系的普遍方程——**拉格朗日方程**.

如果主动力 $\boldsymbol{F}_i$ 均为保守力，$\boldsymbol{F} = -\nabla V$，则(3.4)的广义力 Q_α 可表示为

$$Q_\alpha = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}. \tag{3.11}$$

将上式代入方程(3.10)，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \cdots, s.$$

通常势能 V 仅为位置和时间的函数，与粒子的速度无关，$\dfrac{\partial V}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0$. 因此如令 $L = T - V$，则拉格朗日方程可改写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \cdots, s. \tag{3.12}$$

必须注意：方程(3.10)或(3.12)是由(3.7)式导出的，即 T 表示为 q_α、$\dot{q}_\alpha$ 和 t 的函数；(3.11)式也表明 V 只是 q_α 的函数. 因此拉格朗日方程中的动能和势能都必须使用广义坐标来表示，否则并不能由(3.10)或(3.12)得出正确的动力学方程. 在这样的意义下，函数

$$L = T - V = L(q, \dot{q}, t) \tag{3.13}$$

称为体系的**拉格朗日函数**.

(3.12)式是最常用的一种拉格朗日方程. 从导出的过程中可以看到，它成立的条件是：体系所受的约束是理想和完整的，主动力都是保守力. 但我们把理想约束和主动力是保守力这两个条件，与体系是保守的，两者看成是等价的. 对此需要作一点说明. 在§1.6中把体系所受到的内力和外力都是保守力，或虽

有非保守力,但它们在运动过程中所作的功之和恒为零的力学体系称为保守体系.因为约束力不是保守力,因此对于受有约束的力学体系,如为保守体系,除要求主动力均为保守力外,还要求所有约束力所作之功为零.根据§2.1的讨论我们知道,约束不稳定时,理想约束的约束力所作的虚功之和为零,但实功之和不为零.因此根据§1.6中保守体系的定义,理想而不稳定的约束体系不能称为保守体系,例如图2.5所示的体系.但对于这种体系,只要主动力都是保守力,(3.12)式是成立的.因此当我们把方程(3.12)说成是完整保守体系的拉格朗日方程时,实际上对保守体系的概念作了一些修正,即约束是完整的,并且主动力都是保守力.以后,我们都在这一意义上使用保守体系这一概念.实际上,如果我们扩大体系范围,把原来看成为外界对体系施加不稳定约束的物体,如图2.6中的以等角速度 ω 转动着的杆子,也包括到体系内部中来,则这扩大了的体系是满足§1.6中所定义的保守体系的条件的.现在只不过把较大的保守体系中的那些运动规律已知的物体除去,而把其余的那些运动规律未知的部分称为保守体系,所以保守体系的这两种定义,在实质上是一样的.

当主动力既有保守力又有非保守力时,我们往往把保守力部分用 $-\dfrac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}_i}$ 表示,非保守力部分仍用广义力 Q_α 表示.这样拉格朗日方程就变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha,\quad \alpha=1,2,\cdots,s. \tag{3.14}$$

注意这种形式的拉格朗日方程,广义力 Q_α 中只包括非保守的主动力,保守力部分已反映到 L 中去了.

拉格朗日方程相对于牛顿动力学方程有两点主要差别,这也是拉格朗日方程的优点所在:

(1) 拉格朗日动力学方程取较简洁的形式.对于由 n 个质点所组成,受到 k 个约束条件限制的力学体系,应用牛顿定律将需要 $3n+k$ 个方程联立求解,而用拉格朗日方程只有 $3n-k$ 个.约束越多,这一优点就越明显.

(2) 牛顿方程是从物体受力的角度导出其动力学方程的,拉格朗日方程则是从能量的角度来写动力学方程的.这有两个好处.其一,力是矢量,能量是标量,一般来说处理标量比处理矢量要方便.其二,也是更主要的,力仅是力学范围内的一个物理量,而能量则是整个物理学的一个基本物理量,这就为把力学规律推广应用到其他物理学领域开辟了可能性,使拉格朗日方程成为力学和物理学其他分支相联系的桥梁.

用拉格朗日方程解力学问题时,有两点要特别注意.拉格朗日方程是对力学体系的整体而言的,因此首先要分清体系和外界.如果这一点搞错了,那么不但很难判断体系是否满足理想、完整、保守等条件,而且所得出的方程或者全部

错误(应该包括的物体没有全部包括进去),或者多作了无效的计算(不必包括的物体也包括进去了). 在牛顿力学中,不需要分析体系是否完整、理想,只要独立方程的个数和未知函数的个数一致即可求解,并不需要强烈的整体观念,而拉格朗日方程中的 T 和 V 必须是体系整体的动能和势能. 其次要强调指出,在将体系的 T 和 V 代入拉格朗日方程前,必须利用约束条件先将其中的不独立坐标及其对时间的微商,全部换为广义坐标 q 和广义速度 $\dot{q}$. 只有完成了这一步工作后,$T-V$ 才是体系的拉格朗日函数,才能得出正确的动力学方程. 否则 $T-V$ 并不是体系的拉格朗日函数,而只是动能和势能之差,代入拉格朗日方程将导致错误的结果. 换句话说,体系的不独立坐标必须在得出拉格朗日方程前就全部去掉. 下面我们举一些简单的例题.

【例 1】 用拉格朗日方程写出 §1.3 中图 1.7 的运动微分方程.

解: 本题属完整保守体系,自由度为 2,取 R、φ 为广义坐标,则:

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{R}^2+R^2\dot{\varphi}^2)+\frac{1}{2}m'\dot{z}^2,$$

$$V=m'gz.$$

利用约束关系 $R-z=l$,消去 z 得

$$L=T-V=\frac{1}{2}(m+m')\dot{R}^2+\frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2-m'g(R-l).$$

代入完整、保守体系的拉格朗日方程(3.12)即得

$$(m+m')\ddot{R}-mR\dot{\varphi}^2+m'g=0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mR^2\dot{\varphi})=0.$$

和以前所得结果一样.

【例 2】 写出图 2.9 所示力学体系的拉格朗日方程. (1) 质量为 m' 的滑块约束在水平的 Ox 轴上无摩擦地滑动,滑块上带有一个质量为 m 的平面单摆,摆长为 l. (2) 同上,但滑块 m' 通过劲度系数为 k 的弹簧和固定点相连. (3) 同上,但已知滑块作简谐运动 $x=x_0\sin\omega t$.

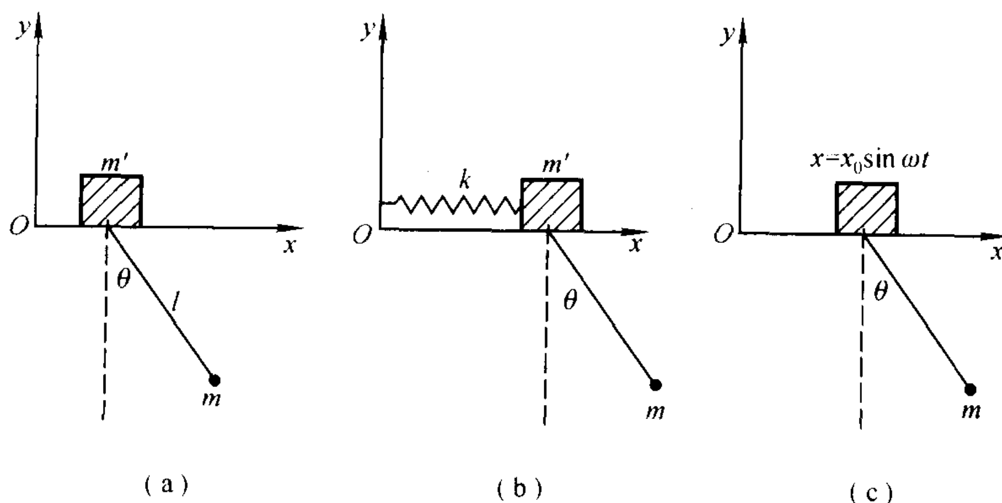


图 2.9

解:(1) 体系为滑块和单摆,自由度为2,取滑块坐标 x 和摆的振幅 θ 为广义坐标,则

$$T = \frac{1}{2}(m' + m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta,$$

$$V = -mgl\cos\theta.$$

由此得

$$L = \frac{1}{2}(m' + m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + mgl\cos\theta.$$

代入拉格朗日方程得

$$\begin{cases}(m' + m)\dot{x} + ml\dot{\theta}\cos\theta = \text{常数}, \\ l\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos\theta - \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + g\sin\theta = 0.\end{cases}$$

(2) 动能和(1)一样,势能中多了一项弹性势能$\frac{1}{2}k(x - x_0)^2$. 因此将体系相应的拉格朗日函数代入拉格朗日方程,得

$$\begin{cases}(m' + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta + k(x - x_0) = 0, \\ l\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos\theta - \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + g\sin\theta = 0.\end{cases}$$

(3) 体系仅为单摆,滑块对单摆来说是一个不稳定约束,体系的自由度为 1,取 θ 为广义坐标. 用 x、y 表示质点 m 的坐标,则 $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$, $V = mgy$. 以 $x = x_0\sin\omega t + l\sin\theta$, $y = -l\cos\theta$ 代入得

$$L = \frac{1}{2}m(\omega^2 x_0^2\cos^2\omega t + l^2\dot{\theta}^2 + 2lx_0\dot{\theta}\omega\cos\omega t\cos\theta) + mgl\cos\theta.$$

代入拉格朗日方程得

$$l\ddot{\theta} - x_0\omega^2\sin\omega t\cos\theta + g\sin\theta = 0.$$

【例 3】 如图 2.10 所示,一光滑杆在铅直平面 Oyz 内以角速度 ω 绕水平轴 Ox 转动,一质点约束在杆上运动,$t = 0$ 时,$r = b$,$\dot{r} = 0$,求质点的运动规律和杆的约束反作用力 F_N.

解:理想、完整体系的拉格朗日方程中不出现约束力,因此用本节所导出的拉格朗日方程不能直接解约束力的问题,但可用一种变通的办法把拉格朗日方程和牛顿运动方程联合起来求解. 先用拉格朗日方程解出体系的运动规律,然后再代入任意一个含有所求约束力的牛顿方程,这时只要通过微分即可得出欲求的约束力.

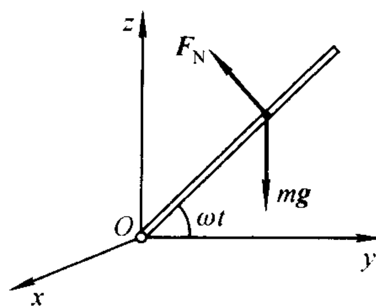


图 2.10

体系的自由度为 1,在 Oyz 平面上取平面极坐标,以 r 为广义坐标,约束方程为 $\theta = \omega t$. 因此

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\omega^2) - mgr\sin\omega t. \tag{1}$$

代入拉格朗日方程得

$$\ddot{r} - \omega^2 r = -g\sin\omega t. \tag{2}$$

设

$$r_1 = \alpha\sin\omega t + \beta\cos\omega t \tag{3}$$

为(2)的一个特解. (3)式对 t 求二次微商得

$$\ddot{r}_1 = -\omega^2(\alpha\sin\omega t + \beta\cos\omega t). \tag{4}$$

将(3)、(4)代入(2)解得 $\alpha = g/2\omega^2, \beta = 0$,所以(2)的一个特解为

$$r_1 = \frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t. \tag{5}$$

于是可得(2)的通解为

$$r = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t. \tag{6}$$

代入初始条件

$$r|_{t=0} = b \text{ 和 } \dot{r}|_{t=0} = 0,$$

可得

$$A = \frac{b}{2} - \frac{g}{4\omega^2}, B = \frac{b}{2} + \frac{g}{4\omega^2}.$$

最后得

$$r = b\,\mathrm{ch}\,\omega t - \frac{g}{2\omega^2}[\mathrm{sh}\,\omega t - \sin\omega t]. \tag{7}$$

这就是质点的运动规律.

下面求杆对质点的约束力,由牛顿运动方程

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = F_N - mg\cos\theta,$$

将 $\theta = \omega t, \dot{\theta} = \omega, \ddot{\theta} = 0$ 代入得

$$F_N = 2m\omega\dot{r} + mg\cos\omega t. \tag{8}$$

由(7)式得

$$\dot{r} = b\omega\,\mathrm{sh}\,\omega t - \frac{g}{2\omega}(\mathrm{ch}\,\omega t - \cos\omega t),$$

代入(8)式即得

$$F_N = 2m\omega^2 b\,\mathrm{sh}\,\omega t - mg\,\mathrm{ch}\,\omega t + 2mg\cos\omega t. \tag{9}$$

【例 4】 在光滑平面上竖直固定一半径为 r 的圆柱体,设长为 l 的轻绳的一端固定在柱底侧面的 O 点,另一端系着一质量为 m 的小球,小球在平面上以垂直于绳方向的初速度 v_0 运动,试求:(1) 体系的拉格朗日函数、运动方程及其解;(2) 小球碰到柱体时的位置和所耗时间.

解: 建立如图 2.11 所示的 Oxy 坐标系.

(1) 本题的力学体系仅为质点 m,平面上自由质点的自由度为 2,现受长为 l 的绳子的约束,所以体系的自由度为 1. 选绳子绕过的角度 θ 为广义坐标,则

$$x = r\sin\theta + (l - r\theta)\cos\theta,$$
$$y = r(1 - \cos\theta) + (l - r\theta)\sin\theta.$$

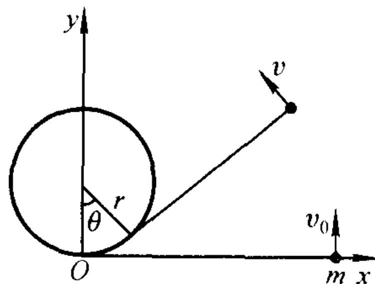


图 2.11

对 t 求导一次得

$$\dot{x} = -(l - r\theta)\sin\theta\dot{\theta},$$
$$\dot{y} = (l - r\theta)\cos\theta\dot{\theta}.$$

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)=\frac{1}{2}m(l-r\theta)^2\dot{\theta}^2.$$

将$\partial L/\partial\dot{\theta}=m(l-r\theta)^2\dot{\theta}$和$\partial L/\partial\theta=-mr(l-r\theta)\dot{\theta}^2$代入拉格朗日方程得

$$(l-r\theta)\ddot{\theta}-r\dot{\theta}^2=0$$

或(暂时不考虑$l=r\theta$这一特殊点)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(l-r\theta)\dot{\theta}]=0.$$

其解为$(l-r\theta)\dot{\theta}=v_0$,再积分得$l\theta-\frac{1}{2}r\theta^2=v_0t$,即

$$\theta(t)=\frac{1}{r}\left(l-\sqrt{l^2-2rv_0t}\right)$$

并且满足$\theta(0)=0$.

(2) 在$l=r\theta$即$\theta_{\max}=l/r$处小球碰到柱体,所耗时为

$$t_{\max}=l^2/2rv_0.$$

§2.4　拉格朗日方程对平衡问题的应用

拉格朗日方程是一个动力学方程,但也可以用来求解静力学问题.静力学有两个基本问题:(1) 在已知主动力的作用下,求体系处于平衡状态时的位置;(2) 求体系平衡时各部分受到的约束力的大小和方向.前一类问题用拉格朗日方程求解特别方便.

力学体系处于平衡状态时,体系的动能恒为零.此时拉格朗日方程变为

$$Q_\alpha=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}=0,\quad\alpha=1,2,\cdots,s\tag{4.1}$$

或

$$\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}=0,\quad\alpha=1,2,\cdots,s.\tag{4.2}$$

(4.1)和(4.2)就是拉格朗日方程理论中质点系的平衡方程,解此方程即可得到体系的平衡位置.当然它们只对理想约束的体系适用,(4.2)还要求主动力均为保守力.

【例1】 长为l_1和l_2的两根均匀棒OA和AB,其质量分别为m_1和m_2,OA可绕O点在垂直平面内自由转动,AB与OA在A点用铰链连接起来,在棒AB的B端加一已知的水平力$\boldsymbol{F}$,求平衡时体系的位置(图2.12).

解:体系的自由度为2,取θ_1和θ_2为广义坐标.由(4.1)式得

$$\begin{cases}Q_1=m_1\boldsymbol{g}\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_1}{\partial\theta_1}+m_2\boldsymbol{g}\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_2}{\partial\theta_1}+\boldsymbol{F}\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_3}{\partial\theta_1}=0,\\ Q_2=m_1\boldsymbol{g}\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_1}{\partial\theta_2}+m_2\boldsymbol{g}\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_2}{\partial\theta_2}+\boldsymbol{F}\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_3}{\partial\theta_2}=0.\end{cases}\tag{1}$$

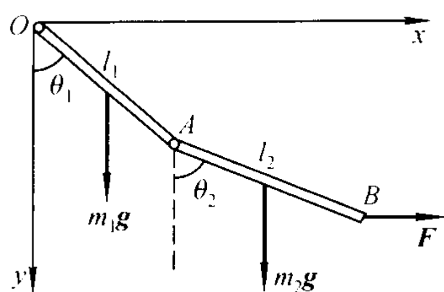


图 2.12

约束条件为

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{r}_1 = \dfrac{l_1}{2}(\sin\theta_1\boldsymbol{i} + \cos\theta_1\boldsymbol{j}), \\
\boldsymbol{r}_2 = l_1(\sin\theta_1\boldsymbol{i} + \cos\theta_1\boldsymbol{j}) + \dfrac{l_2}{2}(\sin\theta_2\boldsymbol{i} + \cos\theta_2\boldsymbol{j}), \\
\boldsymbol{r}_3 = l_1(\sin\theta_1\boldsymbol{i} + \cos\theta_1\boldsymbol{j}) + l_2(\sin\theta_2\boldsymbol{i} + \cos\theta_2\boldsymbol{j}).
\end{cases} \tag{2}
$$

将(2)式代入(1)得

$$
\begin{cases}
-\dfrac{m_1gl_1}{2}\sin\theta_1 - m_2gl_1\sin\theta_1 + Fl_1\cos\theta_1 = 0, \\
Fl_2\cos\theta_2 - \dfrac{m_2gl_2}{2}\sin\theta_2 = 0.
\end{cases} \tag{3}
$$

上式对 θ_1 和 θ_2 求解得

$$
\begin{cases}
\tan\theta_1 = \dfrac{2F}{(m_1+2m_2)g}, \\
\tan\theta_2 = \dfrac{2F}{m_2g}.
\end{cases} \tag{4}
$$

这就是平衡时体系所处的位置.

本题也可由$\dfrac{\partial V}{\partial q_\alpha}=0$来求平衡位置. 因恒力 $\boldsymbol{F}$ 所对应的势能为

$$
V_F = -\int_0^x \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -Fx_3 = -F(l_1\sin\theta_1 + l_2\sin\theta_2),
$$

所以体系的总势能为

$$
V = V_g + V_F = -m_1g\frac{l_1}{2}\cos\theta_1 - m_2g\left(l_1\cos\theta_1 + \frac{l_2}{2}\cos\theta_2\right) - F(l_1\sin\theta_1 + l_2\sin\theta_2).
$$

因此体系的平衡方程为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial V}{\partial\theta_1} = \dfrac{m_1g}{2}l_1\sin\theta_1 + m_2gl_1\sin\theta_1 - Fl_1\cos\theta_1 = 0, \\
\dfrac{\partial V}{\partial\theta_2} = \dfrac{l_2}{2}m_2g\sin\theta_2 - Fl_2\cos\theta_2 = 0,
\end{cases}
$$

和(3)式相同.

【例 2】 质量为 m、固有长度为 l、劲度系数为 k 的弹性圈放在顶角为 2α 的光滑铅直圆锥体上,求平衡时弹性圈的位置.

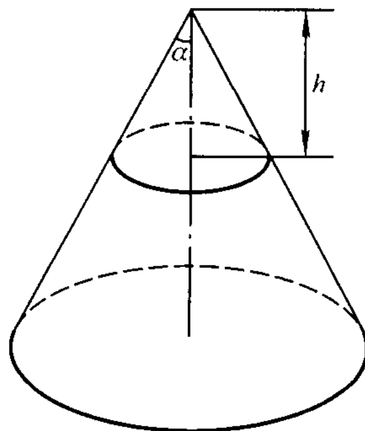


图 2.13

解: 体系的自由度为 1,取弹性圈离圆锥体顶点的距离 h 为广义坐标. 体系的势能由重力势能 V_g 和弹性势能 V_s 两部分组成. 重力势能 $V_g = -mgh$. 弹性势能可这样计算:平衡时弹性圈共伸长了 $2\pi h\tan\alpha - l$,其相应的弹性势能 V_s 为

$$
V_s = \frac{1}{2}k(2\pi h\tan\alpha - l)^2.
$$

把体系的总势能 $V=V_{g}+V_{s}$ 代入平衡条件$\frac{\partial V}{\partial h}=0$,得

$$-mg+\frac{k}{l}(2\pi h\tan\alpha-l)2\pi\tan\alpha=0.$$

由此解得

$$h=\frac{1}{2\pi\tan\alpha}\left(l+\frac{mg}{2\pi k\tan\alpha}\right).$$

这就是平衡时弹性圈所在的位置.

【例 3】 图 2.14(a)所示的是一种简单的桁架结构. 它由 AC、BC、AO、BO 和 OC 五根杆对称组成. 设杆的重量可忽略不计,问当 C 点承受一铅直力 F 时,杆 AO 和 OB 所受的力.

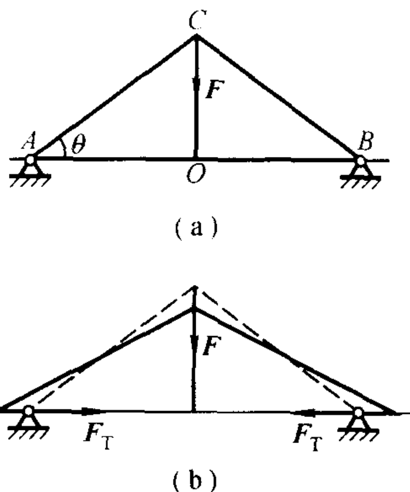


图 2.14

解:本题所求的是体系平衡时的约束力. 拉格朗日方程不能求约束力. 但如果我们把欲求的约束力看成是主动力,而把相应的约束解除,增加一个自由度,则仍可用拉格朗日方程来求体系平衡时的约束力. 本题中可将杆 AO 和 BO 的约束去掉,原来杆所承受的约束力用主动力 F_T 来代替,如图 2.14(b)所示,它和图(a)的情况无任何实质区别. 对于图(b),体系的自由度为 1,取 θ 为广义坐标,由(4.1)式得

$$\boldsymbol{F}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_C}{\partial\theta}+\boldsymbol{F}_T\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}_A}{\partial\theta}-\frac{\partial\boldsymbol{r}_B}{\partial\theta}\right)=0.$$

将

$$\boldsymbol{F}_T=F_T\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{F}=-F\boldsymbol{j},$$

$$\boldsymbol{r}_A=-l\cos\theta\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{r}_B=l\cos\theta\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{r}_C=l\sin\theta\boldsymbol{j}$$

代入得

$$-F\cos\theta+2F_T\sin\theta=0.$$

所以

$$F_T=\frac{F}{2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{F}{2}\cot\theta=\frac{F}{2}\frac{|BO|}{|CO|}.$$

*§2.5 广义势能 带电粒子在电磁场中的拉格朗日函数

如果体系所受到的力不是通常意义下的保守力,广义力 Q_α 就不能表示为 $-\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}$的形式,但可表示为

$$Q_\alpha=-\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial\dot{q}_\alpha}\tag{5.1}$$

的形式,式中函数 U 是广义坐标 q_α 和广义速度 $\dot{q}_\alpha$ 的函数

$$U = U(q, \dot{q}),$$

那么,将(5.1)式代入理想、完整体系的拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha,$$

并令

$$L = T - U,$$

仍可得到保守体系的拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \cdots, s.$$

因此满足条件(5.1)的函数 U 和通常意义下的势能 V 相当,我们称它为**广义势能**,或含有速度的势能. 这表明:存在广义势能的保守体系,它的动力学方程仍可用保守体系拉格朗日方程的形式,但需要用广义势能 U 去取代普通意义的势能 V. 带电粒子在电磁场中的运动是这一类力学体系中最重要的一个例子,下面给出它的拉格朗日函数.

带有电荷 q 的粒子在电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{B}$ 中运动时所受到的**洛伦兹**(Lorentz)**力**为

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}). \tag{5.2}$$

电场和磁场本身的运动满足麦克斯韦(Maxwell)方程组:

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{E} + \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho / \varepsilon_0, \\ \nabla \times \boldsymbol{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0 \boldsymbol{j}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0. \end{cases} \tag{5.3}$$

显然洛伦兹力(5.2)不满足通常意义下的保守力的条件,因为由(5.3)可看出 $\nabla \times \boldsymbol{F} \neq 0$. 因此不存在通常意义下的拉格朗日函数. 但是利用麦克斯韦方程,我们可把洛伦兹力写成为(5.1)的形式,得出其广义势能 U.

根据矢量分析恒等式 $\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A} \equiv 0$,由(5.3)中的第四式可把 $\boldsymbol{B}$ 表示为

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}. \tag{5.4}$$

将(5.4)代入(5.3)中的第一个方程,可得

$$\nabla \times \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

于是根据恒等式 $\nabla \times \nabla \varphi \equiv 0$,又可以定义一个标量函数 φ:

$$-\nabla \varphi = \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}. \tag{5.5}$$

通常称 $\boldsymbol{A}$ 为**电磁场的矢势**, φ 为**电磁场的标势**,由于 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 只是位置和时间的函数,因此由(5.4)和(5.5)所定义的 $\boldsymbol{A}$ 和 φ 也只是时间和空间的函数,和粒子运动的速度无关.

把(5.4)和(5.5)代入(5.2),可将洛伦兹力表示为

$$\boldsymbol{F} = q\left[-\nabla\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})\right]. \tag{5.6}$$

为了把上式写成(5.1)的形式,需要把它的分量形式写出来. 因

$$(\nabla\varphi)_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

$$[\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})]_x = v_y\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - v_z\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right),$$

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)_x = \frac{\partial A_x}{\partial t},$$

所以

$$F_x = q\left[-\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} + v_y\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - v_z\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\right]. \tag{5.7}$$

如上所述,矢势 $\boldsymbol{A}$ 是 x、y、z 和 t 的函数. 由于 $\boldsymbol{A}$ 是粒子所在点的电磁场的矢势,因此 $\boldsymbol{A}$ 中的坐标变量 x、y、z 是粒子在 t 时刻的空间位置,它们对时间的微商就是粒子的速度:

$$\dot{x} = v_x,\quad \dot{y} = v_y,\quad \dot{z} = v_z.$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial A_x}{\partial z}.$$

将上式代入(5.7)式得

$$F_x = q\left[-\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t} + v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z\frac{\partial A_z}{\partial x}\right].$$

考虑到 $\boldsymbol{A}$ 和 φ 都不是 $\boldsymbol{v}$ 的函数,因此

$$\frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial}{\partial v_x}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v})\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial v_x}(-\varphi + \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}),$$

$$\left(v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) = \boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}).$$

于是 F_x 可表示为

$$F_x = q\left[-\frac{\partial}{\partial x}(\varphi - \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial v_x}(\varphi - \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v})\right]. \tag{5.8}$$

将(5.8)和(5.1)比较得

$$U = q\varphi - q\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}.$$

这就是带电粒子在电磁场中的广义势能,而粒子的拉格朗日函数则为

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - q\varphi + q\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}. \tag{5.9}$$

【例】 质量为 m、电荷为 q 的粒子在均匀电场 $\boldsymbol{E}=E\boldsymbol{j}$ 和均匀磁场 $\boldsymbol{B}=B\boldsymbol{k}$ 中运动. 写出粒子的拉格朗日函数.

解：对于所给的电场和磁场，其相应的矢势和标势为

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}B(-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}),$$

$$\varphi = -Ey.$$

将它们代入(5.10)式得粒子的拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + qEy + \frac{qB}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}),$$

将它代入拉格朗日方程，得粒子的运动方程为

$$\begin{cases} m\ddot{x} - qB\dot{y} = 0, \\ m\ddot{y} + qB\dot{x} = qE, \\ m\ddot{z} = 0. \end{cases}$$

它就是第一章的(9.22)式.

**§2.6 非完整体系的拉格朗日方程

从本章前几节的讨论中可以看到，对于理想、完整的力学体系，用§2.3中所建立的拉格朗日方程给出体系的动力学方程是十分方便的. 这种拉格朗日方程通常称为**第二类拉格朗日方程**. 对于非完整的力学体系，也可用广义坐标建立一个动力学方程，称为**第一类拉格朗日方程**.

在§2.3中已经指出，非完整体系实际上就是不可积微分约束体系. 我们不准备讨论一般的微分约束问题，只讨论线性微分约束的情况. 即假定体系除了受到 k 个完整的约束外，还受到 m 个微分约束，其约束方程为

$$\sum_{\alpha=1}^{s} a_{l\alpha}\dot{q}_\alpha + a_{l0} = 0, \quad l = 1,2,\cdots,m$$

或

$$\sum_{\alpha=1}^{s} a_{l\alpha}\mathrm{d}q_\alpha + a_{l0}\mathrm{d}t = 0, \quad l = 1,2,\cdots,m. \tag{6.1}$$

§2.3中所例举的轮子——在地面上滚动的情况，就属于这种类型的约束，当(6.1)中取

$$q_1 = x, \quad q_2 = y, \quad q_3 = \varphi, \quad q_4 = \theta,$$

$$a_{11} = a_{22} = 1, \quad a_{13} = -r\sin\theta, \quad a_{23} = r\cos\theta,$$

其余的 $a_{l\alpha}$ 和 a_{l0} 均为零时，(6.1)式即是(2.4)式.

完整体系的拉格朗日方程是从达朗贝尔方程中消去不独立坐标后得到的. 根据§2.3中所述，将 k 个完整约束条件代入达朗贝尔方程后所得的方程是

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\left[Q_\alpha + \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right]\delta q_\alpha = 0. \tag{6.2}$$

如果体系没有其他不可积微分约束,则上式中的 s 个 q_α 是相互独立的,要使上式成立,必须每个 δq_α 的系数都为零,从而得到完整体系的拉格朗日方程. 但现在由于还受到 m 个不可积微分约束(6.1),因此(6.2)中的 k 个 q_α 不是互相独立的,独立的只有 $k-m$ 个. 因此我们不能令(6.2)式中的每个 δq_α 的系数都是零,而必须把(6.1)式和(6.2)结合起来才能得到正确的动力学方程.

(6.2)式中的 δq_α 是体系在完整约束下的虚位移. 体系作虚位移时,微分约束(6.1)应表示为

$$\sum_{\alpha=1}^{s} a_{l\alpha}\delta q_\alpha = 0, \quad l = 1,2,\cdots,m, \tag{6.3}$$

用时间 t 的任意函数 $\lambda_l(t)$ 乘以上式,方程应仍然成立

$$\lambda_l(t)\sum_{\alpha=1}^{s} a_{l\alpha}\delta q_\alpha = 0, \quad l = 1,2,\cdots,m. \tag{6.4}$$

现在我们将(6.4)式和(6.2)式相加得

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\left[Q_\alpha + \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} + \sum_{l=1}^{m}\lambda_l a_{l\alpha}\right]\delta q_\alpha = 0. \tag{6.5}$$

比较(6.2)和(6.5)两式,后者多了一项 $\sum\limits_{l=1}^{m}\lambda_l a_{l\alpha}$,其余都是一样的. 在(6.2)中,由于 s 个 q_α 中只有 $k-m$ 个是独立的,因此不能令其每个 δq_α 的系数为零. 但在(6.5)中,$\lambda_l(t)$是任意函数,我们只要适当选取这 m 个函数,补足(6.2)中所缺的 m 个条件,就可以使每个 δq_α 的系数都为零了. 因此得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha + \sum_{l=1}^{m}\lambda_l a_{l\alpha}, \quad \alpha = 1,2,\cdots,s, \tag{6.6}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \sum_{l=1}^{m}\lambda_l a_{l\alpha}, \quad \alpha = 1,2,\cdots,s. \tag{6.7}$$

这就是存在线性不可积微分约束的力学体系的动力学方程. 这组方程中,含有 s 个 q_α 和 m 个 λ_l 共 $s+m$ 个未知函数,(6.6)或(6.7)只有 s 个方程,需要和 m 个约束方程(6.1)联合起来才能求解.

【例】 两个质量均为 m 的质点 A 和 B 用一长为 l 的轻杆相连接. 设此体系只能在铅直平面内运动,并且杆的中点 C 的速度必须沿杆 AB 的方向,求质点 A 和 B 的运动.

解: 如不考虑对 C 点速度方向的限制,则此体系是完整理想的,自由度为 3. 取 C 点的坐标 x、y 和杆 AB 与水平轴的夹角 θ 为广义坐标,则 A 点和 B 点的坐标为

$$\begin{cases} x_1 = x - \dfrac{l}{2}\cos\theta, \\ y_1 = y - \dfrac{l}{2}\sin\theta, \\ x_2 = x + \dfrac{l}{2}\cos\theta, \\ y_2 = y + \dfrac{l}{2}\sin\theta. \end{cases} \tag{1}$$

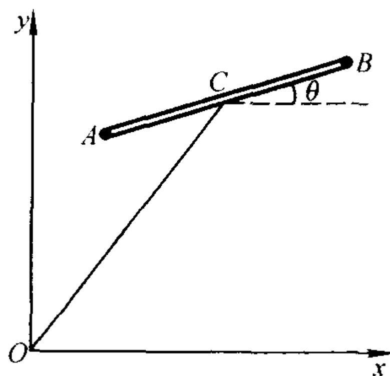


图 2.15

体系的拉格朗日函数为

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - (mgy_1 + mgy_2)$$

$$= m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{m}{4}l^2\dot{\theta}^2 - 2mgy. \tag{2}$$

如果直接将(2)式代入拉格朗日方程,那么所得的结果是不考虑 C 点的速度方向有限制的情况. v_C 的方向限制在杆 AB 的方向,就是 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 在垂直于 AB 方向的投影之和为零. 从图2.15可知,此条件的数学表示式为

$$\dot{x}\sin\theta - \dot{y}\cos\theta = 0, \tag{3}$$

或

$$\sin\theta\mathrm{d}x - \cos\theta\mathrm{d}y = 0.$$

这是一个不可积的微分约束. 与(6.1)式比较得

$$a_x = \sin\theta, \quad a_y = -\cos\theta, \quad a_\theta = a_0 = 0. \tag{4}$$

将(2)和(4)代入非完整体系的拉格朗日方程(6.6)中得

$$\begin{cases} 2m\ddot{x} = \lambda\sin\theta, \\ 2m\ddot{y} + 2mg = -\lambda\cos\theta, \\ \dfrac{1}{2}ml^2\ddot{\theta} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

由(5)中的第三个方程得

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \alpha, \\ \theta = \alpha t + \beta. \end{cases} \tag{6}$$

α 和 β 是常数. 由(5)中的前两个方程得

$$\ddot{x} = -(\ddot{y} + g)\tan\theta. \tag{7}$$

由(6)得

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \alpha\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta},$$

$$\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta} = \alpha^2\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\theta^2},$$

$$\dot{y} = \alpha\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta},$$

$$\ddot{y} = \alpha^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2},$$

将它们代入(3)和(7)得

$$\sin\theta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} - \cos\theta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = 0, \tag{8}$$

$$\alpha^2\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\theta^2} = -\tan\theta\left(\alpha^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2} + g\right). \tag{9}$$

由(8)得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \cot\theta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}.$$

上式两边对 θ 求导得

$$\frac{d^2x}{d\theta^2}=-\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{dy}{d\theta}+\cot\theta\frac{d^2y}{d\theta^2}.$$

将它代入(9)式经过整理后得

$$\frac{d^2y}{d\theta^2}-\cot\theta\frac{dy}{d\theta}+\frac{g}{\alpha^2}\sin^2\theta=0. \tag{10}$$

方程(10)的解为

$$y=-\frac{\gamma}{\alpha}\cos\theta-\frac{g}{2\alpha^2}\cos^2\theta+\delta, \tag{11}$$

式中 γ 和 δ 是积分常数. 将(11)代入(3)得

$$\begin{aligned}x&=\int dx=\int\left(\frac{\gamma}{\alpha}\cos\theta+\frac{g}{\alpha^2}\cos^2\theta\right)d\theta\\&=\frac{\gamma}{\alpha}\sin\theta+\frac{g}{2\alpha^2}(\sin\theta\cos\theta+\theta)+\varepsilon,\end{aligned} \tag{12}$$

式中 ε 亦为积分常数.

将(11)、(12)代入(1)再加上(6)式,最后得

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{\gamma}{\alpha}\sin\theta+\dfrac{g}{2\alpha^2}(\sin\theta\cos\theta+\theta)-\dfrac{l}{2}\cos\theta+\varepsilon,\\ y_1=-\dfrac{\gamma}{\alpha}\cos\theta-\dfrac{g}{2\alpha^2}\cos^2\theta-\dfrac{l}{2}\sin\theta+\delta,\\ x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}\sin\theta+\dfrac{g}{2\alpha^2}(\sin\theta\cos\theta+\theta)+\dfrac{l}{2}\cos\theta+\varepsilon,\\ y_2=-\dfrac{\gamma}{\alpha}\cos\theta-\dfrac{g}{2\alpha^2}\cos^2\theta+\dfrac{l}{2}\sin\theta+\delta,\\ \theta=\alpha t+\beta.\end{cases} \tag{13}$$

这就是 A 和 B 两个质点的运动情况.

§2.7　对称性和守恒定律

在牛顿动力学方程中,如果体系的动量、角动量或它们的某个分量及能量在运动过程中是守恒的,则可用这个守恒量的表示式来取代一个动力学方程. 例如质点在有心力的作用下运动,可用角动量和能量守恒

$$\begin{cases}mr^2\dot\theta=L,\\ \dfrac{1}{2}m(\dot r^2+r^2\dot\theta^2)+V(r)=E\end{cases}$$

的表达式来取代动力学方程

$$\begin{cases}m(\ddot r-r\dot\theta^2)=F(r),\\ m(r\ddot\theta+2\dot r\dot\theta)=0.\end{cases}$$

前者是一阶微分方程,后者是二阶微分方程. 一般说来,一阶方程总比二阶方程

容易求解. 特别是,如果欲求的问题只需要知道速度即可,则往往由守恒定律就可以直接得到所需结果. 因此希望尽可能多地利用守恒定律来解力学问题.

拉格朗日方程也是体系状态的运动方程. 一个力学体系的拉格朗日函数 L 是 q_α、$\dot{q}_\alpha$($\alpha=1,2,\cdots,s$)和 t 的函数. 因此,一个力学体系在时刻 t 的状态由 $2s$ 个量 q_α 和 $\dot{q}_\alpha$ 决定. 体系运动时,q_α 和 $\dot{q}_\alpha$ 一般均随时间而变:

$$\begin{cases} q_\alpha = q_\alpha(t, C_1, C_2, \cdots, C_{2s}), \\ \dot{q}_\alpha = \dot{q}_\alpha(t, C_1, C_2, \cdots, C_{2s}), \end{cases} \alpha = 1,2,\cdots,s, \tag{7.1}$$

其中 $C_1, C_2, \cdots, C_{2s}$ 是拉格朗日方程通解的 $2s$ 个任意常数. 但是可以存在 q_α 和 $\dot{q}_\alpha$ 的某种函数,在运动过程中它们保持不变,这种函数叫做**运动积分**.

如果体系的自由度为 s,那么从(7.1)的 $2s$ 个方程中消去 t 后留下 $2s-1$ 个方程,由这 $2s-1$ 个方程可解得

$$C_i = C_i(q_1, q_2, \cdots, q_s; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_s), \quad i = 1,2,\cdots,2s-1. \tag{7.2}$$

显然,这 $2s-1$ 个 $C_i(q_\alpha, \dot{q}_\alpha)$都是独立的,都是拉格朗日方程的运动积分. 所以 s 个自由度的力学体系共有 $2s-1$ 个独立的运动积分. 原则上总可以做到用运动积分来取代全部拉格朗日方程,如何做到这一点留待以后再来讨论,在这一节中先讨论两类最容易找的运动积分:**广义动量守恒**和**广义能量积分**.

如果拉格朗日函数中不出现某一广义坐标 q_α,这时$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0$,相应的拉格朗日方程变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0,$$

于是就得到一个运动积分

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = 常数. \tag{7.3}$$

p_α 称为与广义坐标 q_α 共轭的**广义动量**. 拉格朗日函数中不显含的广义坐标称为**循环坐标**或**可遗坐标**.

(7.3)式的运动积分的物理意义是什么呢? 我们可以看到,当 q_α 为普通直角坐标时,对应的 p_α 即为普通的动量,(7.3)式反映了动量守恒定律. 例如重力场中的粒子,其拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz,$$

x、y 为循环坐标,所以

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = 常数,$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} = 常数$$

反映了粒子在水平方向动量守恒. 如果 q_α 是角坐标,则对应的广义动量 p_α 是角动量,(7.3)式就反映了角动量守恒. 例如中心势场中粒子的拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r),$$

θ 为循环坐标,因此

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = 常数, \tag{7.4}$$

这就是我们已知的角动量守恒定律.

如果拉格朗日函数 L 中不显含时间 t,这时$\frac{\partial L}{\partial t}=0$,则拉格朗日函数对时间的微商可写成如下形式:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha.$$

利用拉格朗日方程,$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$可换为$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$,于是

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} &= \sum_{\alpha=1}^{s}\dot{q}_\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{q}_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_\alpha\dot{q}_\alpha),\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot{q}_\alpha - L\right) = 0,$$

从而得到另一个运动积分

$$H = \sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot{q}_\alpha - L = 常数. \tag{7.5}$$

下面我们来讨论函数 H 的物理意义. 为此我们先写出用广义速度 $\dot{q}_\alpha$ 表示的动能 T 的具体形式. 利用 $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \cdots, q_s, t)$,得

$$\begin{aligned}T &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\dot{r}_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\left(\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\right)\cdot\left(\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\right) \\ &= T_2 + T_1 + T_0,\end{aligned} \tag{7.6}$$

其中

$$T_2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta = A_{\alpha\beta}(q,t)\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta,$$

$$T_1 = \sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\dot{q}_\alpha = B_\alpha(q,t)\dot{q}_\alpha,$$

$$T_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\right)^2 .$$

T_2 是广义速度 $\dot{q}_\alpha$ 的二次齐次式，T_1 是一次齐次式，T_0 和广义速度无关. 由于普通的势能 V 和广义速度无关，因此 $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}$. 于是利用齐次函数的**欧拉(Euler)定理***，我们可得

$$H = \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \dot{q}_\alpha - L = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha - L$$
$$= 2T_2 + T_1 - L = T_2 - T_0 + V = \text{常数}. \tag{7.7}$$

所以 H 是一个与动能和势能有关的量，称为**广义能量**. (7.7)式称为**雅可比积分**或**广义能量积分**. 但从(7.7)式中仍然看不出 H 的物理意义是什么.

下面进一步分析约束稳定时(就是约束方程中不显含时间)的情况. 这时 $\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} = 0$，将它代入(7.6)式得

$$T = T_2, \quad T_1 = T_0 = 0.$$

于是(7.7)式变为

$$H = T + V = \text{常数}. \tag{7.8}$$

上式表明：在 L 不显含时间，并且约束是稳定的情况下，(7.5)式所定义的函数 H 就是体系的能量，(7.8)式就是能量守恒定律.

运动积分有两类. 一类具有可加性，即对于由几部分组成而各部分之间的作用又可忽略的体系，它的值等于各部分之值的和. 另一类不具有可加性. 具有可加性的运动积分称为**守恒量**. 上面我们已经讨论过的动量守恒、角动量守恒和能量守恒，都是具有可加性的运动积分，在经典力学范围内总共只有 7 个这样的量. 不具有可加性的运动积分有很多. 例如我们可取(7.1)中的 $C_1, C_2, \cdots, C_{2s}$ 为 $t=0$ 时 q_α 和 $\dot{q}_\alpha$ 的值，由于 q_α 和 $\dot{q}_\alpha$ 一般不具有可加性，所以由(7.2)所表示的运动积分也就不具有可加性了.

具有可加性的运动积分的不变性是和空间和时间的一些基本性质——它们的均匀性和各向同性——相联系的：**时间的均匀性导致能量守恒，空间的均匀性导致动量守恒，空间各向同性导致角动量守恒**.

空间的均匀性和各向同性，意味着坐标轴的原点和方向可任意选取而不会改变体系的力学性质，也就是说，当空间有一任意无限小平移

$$\delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_x \boldsymbol{i} + \varepsilon_y \boldsymbol{j} + \varepsilon_z \boldsymbol{k}, \tag{7.9}$$

---

* 齐次函数的欧拉定理：若 f 为 x_i 的 m 次齐次式，则 $\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = mf$.

或任一无限小转动

$$\delta \boldsymbol{\varphi} = \delta \varphi \boldsymbol{e}_{\mathrm{n}} \tag{7.10}$$

时，反映体系力学性质的拉格朗日函数 L 并不发生改变，即

$$\delta L = 0. \tag{7.11}$$

(7.10)式中的 $\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$ 表示转动轴的方向，$\delta\varphi$ 表示绕轴转过的角度. 由于任意选取坐标原点和坐标轴的方向不会引起时间的变化，即 $\delta t = 0$，因此(7.11)式可具体表示为

$$\begin{aligned}\delta L &= \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}}\delta \dot{q}_{\alpha} + \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}}\delta q_{\alpha}\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}}\delta q_{\alpha}\right) = 0.\end{aligned} \tag{7.12}$$

将(3.8)式代入(7.12)式得

$$\begin{aligned}\delta L &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \left(\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_{\alpha}}\delta q_{\alpha}\right)\right] \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0.\end{aligned} \tag{7.13}$$

这个表示式对于空间均匀性和空间各向同性两种情况都适用.

(1) **空间均匀性导致动量守恒**. 空间均匀性意味着坐标可以任意平移. 而坐标平移时体系中所有的质点有相同位移，因此各个质点的 $\delta \boldsymbol{r}_i$ 均相同，都是 $\boldsymbol{\varepsilon}$. 这时(7.13)就变为

$$\delta L = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i\Big) = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = 0.$$

由于 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 是任意的，因此要使上式成立，必然得出

$$\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i = \text{常矢量}.$$

即如果体系所在的空间是均匀的，体系的动量一定守恒.

(2) **空间的各向同性导致角动量守恒**. 空间的各向同性意味着坐标轴的方向可以任意转动. 如图 2.16 所示，当坐标发生一任意转动 $\delta\varphi$ 时，由此所引起的第 i 个质点的位移为

$$\delta \boldsymbol{r}_i = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{r}_i .$$

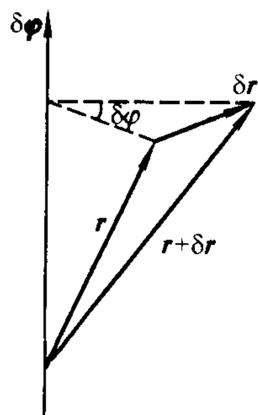


图 2.16

将它代入(7.13)式得

$$\delta L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot (\delta \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{r}_i)\Big]$$

$$= \delta \boldsymbol{\varphi} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i\right] = \delta \boldsymbol{\varphi} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = 0.$$

由于 $\delta\boldsymbol{\varphi}$ 是任意的,要使上式成立,必然得出

$$\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i = \text{常矢量}.$$

以上均是对封闭体系而言的. 在外场中的质点系,当坐标原点移动或坐标轴的方向转动时,外场对质点的作用将会改变,因此体系的动量和角动量不再守恒. 如果外场不依赖某一坐标,则坐标原点在这个方向平移时拉格朗日函数不变,于是可得出这个方向动量守恒的结论. 重力场中质点水平方向的动量守恒就属于这种情况. 同样,如果空间在 x、y 方向是各向同性的,x 轴和 y 轴的任意选取不会引起拉格朗日函数的改变,则绕 z 轴作任意转动时拉格朗日函数不变,从而得出角动量在 z 轴方向守恒的结论.

下面再讨论能量守恒来源于时间均匀性的问题. 所谓时间均匀性,指的是时间原点($t=0$ 的时刻)可以任意选取,时间平移不会引起拉格朗日函数的改变. 这只有在拉格朗日函数不显含时间,即$\frac{\partial L}{\partial t}=0$ 时才有可能. 上面我们已经证明,$\frac{\partial L}{\partial t}=0$ 时体系的广义能量 $H=\sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \dot{q}_\alpha - L$ 守恒,当约束稳定时 H 即为体系的能量. 约束不稳定,约束方程含有时间,当时间平移时,约束条件就要改变,时间的均匀性就破坏了. 这表明能量守恒的条件可由时间均匀性的要求直接得到,所以能量守恒条件的本质是时间的均匀性.

在建立拉格朗日方程时我们曾指出,对于一个确定的力学体系,广义坐标的数目是一定的,但具体选取什么作为广义坐标则是任意的. 上面所指出的时空对称性和守恒定律的关系告诉我们:如果体系所在的空间有某种平动或转动的对称性,则应取与此对称性相关联的一个坐标为广义坐标. 因为,从上面的讨论中可知,这种坐标一定是循环坐标,相应的广义动量就是对应的守恒量. 这就部分地回答了本节开始时所提出的问题:如何做到使拉格朗日方程全部或部分地被运动积分所取代的问题.

【例】 写出质点在下列各种势场中运动时的循环坐标及其相应的守恒量. (1) 无限大均匀平面场;(2) 无限大均匀圆柱场;(3) 均匀圆环面的场.

解:(1) 取 Oxy 平面为此平面,则空间对于 x 方向和 y 方向的平移不变,绕 z 轴的转动不变. 因此坐标 x、y 和绕 z 轴的转角 φ 均为循环坐标,相应的守恒量为 p_x、p_y 和 L_z.

(2) 取圆柱的轴线为 z 轴,则空间对于 z 方向的平移和绕 z 轴的转动不变,所以 z 和 φ 均为循环坐标,相应的守恒量为 p_z 和 L_z.

(3) 取圆环平面为 Oxy 平面,则空间对于绕 z 轴的转动不变,所以 φ 为循环坐标,相应的守恒量是 L_z.

*§2.8 瞬时力问题的拉格朗日方程

在许多问题中,力学体系运动状态的改变是由于受到瞬时力作用的结果.所谓瞬时力,指的是力 F 作用的时间 Δt 很短,尽管 F 的值很大,但冲量

$$I = \int_0^{\Delta t} F \mathrm{d}t \tag{8.1}$$

有限.

在普通物理中已用牛顿动力学方程讨论过这个问题.如果一个力学体系由许多相互间存在约束的物体所组成,则用拉格朗日方程处理瞬时力问题比用牛顿力学方法方便.本节就来讨论这种方法.

对于理想、完整的力学体系,拉格朗日方程的一般形式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha, \quad \alpha = 1,2,\cdots,s.$$

将上式对时间从 0 到 Δt 积分,左边第一项为

$$\int_0^{\Delta t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\mathrm{d}t = \left.\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right|_{\Delta t} - \left.\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right|_0,$$

左边第二项

$$\int_0^{\Delta t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\mathrm{d}t \leqslant \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)_{\max}\Delta t,$$

由于 $\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)_{\max}$ 是有限的,因此当 Δt 很小时,这一项为零,右边则为

$$\int_0^{\Delta t} Q_\alpha \mathrm{d}t = \int_0^{\Delta t}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\cdot \boldsymbol{F}\mathrm{d}t = I_\alpha. \tag{8.2}$$

I_α 称为**广义冲量**,和(8.1)一样,I_α 是有限的.于是得到瞬时力作用下的拉格朗日方程为:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right|_{\Delta t} - \left.\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right|_0 = I_\alpha, \quad \alpha = 1,2,\cdots,s. \tag{8.3}$$

解这 s 个方程即可得到瞬时力作用前后体系运动状态的改变.

【例】 四根质量均为 m,长为 l 的匀质杆,端点用铰链相连成菱形,放置在光滑水平面上,原来的形状为正方形.(1) 若体系开始时静止,而后在 A 点突然受到沿图中 AB 方向的冲量 I,求冲击终了时 A 点的速度;(2) 若开始时体系以速度 v_0 沿 BA 方向运动,而后突然将 A 点固定,求以后质心 C 的速度和杆的角速度,并计算能量的损失.

解:如图 2.17 所示,取固定坐标系 Oxy 和质心坐标系 $Cx'y'$,体系有 2 个自由度,取质心

C 的坐标 y_C 和杆与 Cx' 轴的夹角 θ 为广义坐标，则 A 点的位置矢量为

$$\boldsymbol{r}_A = (y_C - l\sin\theta)\boldsymbol{j}. \tag{1}$$

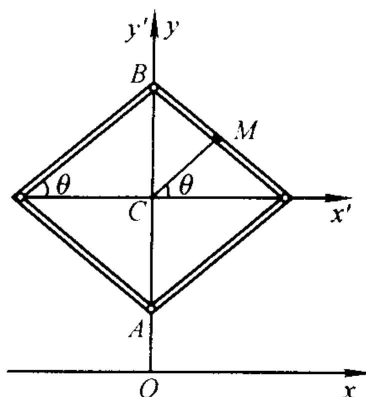


图 2.17

根据寇尼希定理，体系的动能包括质心动能 $\frac{1}{2}(4m)\dot{y}_C^2$ 和四根杆相对于质心的动能．在质心系 $Cx'y'$ 中，每一根杆的动能又可由其质心 M 的动能和绕 M 点转动的动能所组成，后者为 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}ml^2\cdot\dot{\theta}^2$，其中 $\frac{1}{12}ml^2$ 为匀质杆绕中心的转动惯量．所以体系总的动能为

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(4m)\dot{y}_C^2 + 4\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{l}{2}\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{24}ml^2\dot{\theta}^2\right] \\ &= 2m\dot{y}_C^2 + \frac{2}{3}ml^2\dot{\theta}^2, \end{aligned} \tag{2}$$

由此得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial \dot{y}_C} = 4m\dot{y}_C, \\ \dfrac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \dfrac{4}{3}ml^2\dot{\theta}. \end{cases} \tag{3}$$

(1) 原来静止，端点 A 突然受到冲量 $I = \int F\mathrm{d}t$，此时由(1)得

$$\begin{cases} I_y = \displaystyle\int_0^{\Delta t} \frac{\partial \boldsymbol{r}_A}{\partial y_C}\cdot \boldsymbol{F}\mathrm{d}t = \int_0^{\Delta t} F\mathrm{d}t = I, \\ I_\theta = \displaystyle\int_0^{\Delta t} \frac{\partial \boldsymbol{r}_A}{\partial \theta}\cdot \boldsymbol{F}\mathrm{d}t = -\int_0^{\Delta t} l\cos\theta F\mathrm{d}t = -\frac{l}{\sqrt{2}}I. \end{cases} \tag{4}$$

上面第二式中最后一步是由于冲量作用时 $\theta = 45°$ 得出的．将(3)、(4)代入(8.3)，并考虑到在冲量作用前 $\dot{y}_C = 0, \dot{\theta} = 0$，最后得

$$\begin{cases} 4m\dot{y}_C = I, \\ \dfrac{4}{3}ml^2\dot{\theta} = -\dfrac{l}{\sqrt{2}}I. \end{cases} \tag{5}$$

由(1)得

$$\boldsymbol{v}_A = (\dot{y}_C - l\cos\theta\,\dot{\theta})\boldsymbol{j}\Big|_{\theta=45°} = \left(\dot{y}_C - \frac{l}{\sqrt{2}}\dot{\theta}\right)\boldsymbol{j}. \tag{6}$$

将(5)中的 $\dot{y}_C$ 和 $\dot{\theta}$ 代入上式即得 A 点的速度为

$$\boldsymbol{v}_A = \left(\frac{I}{4m} + \frac{3I}{8m}\right)\boldsymbol{j} = \frac{5I}{8m}\boldsymbol{j}. \tag{7}$$

(2) 体系原来以等速 $-v_0\boldsymbol{j}$ 运动，然后突然将 A 点固定．因此由(6)式得

$$\dot{y}_C - \frac{l}{\sqrt{2}}\dot{\theta} = 0. \tag{8}$$

这种情况可看成是由于 A 点受到一个外加冲量 I' 的结果．A 点固定前

$$\dot{y}_C\big|_{t=0} = -v_0, \quad \dot{\theta}\big|_{t=0} = 0,$$

因此由(8.3)式得

$$\begin{cases} 4m(\dot{y}_C + v_0) = I', \\ \dfrac{4}{3}ml^2\dot{\theta} = -\dfrac{l}{\sqrt{2}}I'. \end{cases} \tag{9}$$

由(8)和(9)消去 I' 得

$$\begin{cases} \dot{y}_C = -\dfrac{3}{5}v_0, \\ \dot{\theta} = -\dfrac{3\sqrt{2}}{5l}v_0. \end{cases} \tag{10}$$

这就是 A 点突然固定后质心的速度和杆的角速度. 由(2)得体系动能的损失为

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{1}{2}(4m)v_0^2 - \left[2m\left(-\frac{3}{5}v_0\right)^2 + \frac{2}{3}ml^2\left(-\frac{3\sqrt{2}}{5l}v_0\right)^2\right] \\ &= \frac{4}{5}mv_0^2. \end{aligned} \tag{11}$$

上例两种情况的瞬时力都来自外界,体系内部发生爆炸或互相碰撞也会产生瞬时力,这时的瞬时力都是内力,因此过程前后体系的动量、角动量不变,但能量一般都发生改变. 单由动量和角动量守恒并不能把过程前后的状态完全确定. 对于爆炸问题需要知道爆炸时所释放的能量. 对于碰撞问题,要引入一个称为**恢复系数**的参数. 下面对碰撞问题作一简单讨论.

假定发生碰撞的物体是两个光滑的小球. 把整个碰撞过程分成压缩和恢复两个阶段. 在压缩阶段,两球发生微小的压缩形变,相互间冲击力的方向沿球心连线的方向,相应的冲量称为**压缩冲量**,用 I_1 表示. 这种压缩过程一直持续到两球连心线方向的速度相等为止. 然后开始恢复直到两球脱离接触,其相应的冲量称为**恢复冲量**,用 I_2 表示. 恢复冲量和压缩冲量之比称为**恢复系数**,记作 e,即

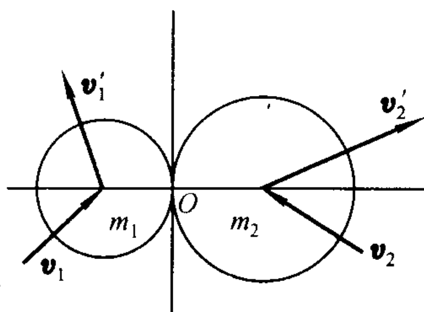


图 2.18

$$e = \frac{I_2}{I_1}. \tag{8.4}$$

e 的值和两个物体的材料性质有关,需由实验方法测定. 例如两个玻璃球之间碰撞的恢复系数约为 0.93,钢球之间约为 0.57,硬质木球之间约为 0.50.

将两个球碰撞前后的速度 $\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$ 和 $\boldsymbol{v}_1'$、$\boldsymbol{v}_2'$ 沿两球接触面的法线(即连心线方向)$\boldsymbol{e}_n$ 方向和切线 $\boldsymbol{e}_t$ 方向分解,得

$$I_1 = m_1(v_{1n} - v) = -m_2(v_{2n} - v),$$

$$I_2 = m_1(v - v_{1n}') = -m_2(v - v_{2n}').$$

式中 v 为压缩过程结束时两球沿连心线方向的公共速度. 将上式中的 v 消去得

$$v_{1n} - v_{2n} = I_1\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right),$$

$$v_{1n}' - v_{2n}' = -I_2\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right).$$

由此可得恢复系数 e 的另一个表示式：

$$e = \frac{I_2}{I_1} = \frac{v_{2n}' - v_{1n}'}{v_{1n} - v_{2n}}. \tag{8.5}$$

这个关系式称为**牛顿公式**，实际测定恢复系数时是按此公式进行计算的，(8.4)中的 I_1 和 I_2 难以实际测定.

补充了牛顿公式以后，由碰撞前后动量守恒

$$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = m_1\boldsymbol{v}_1' + m_2\boldsymbol{v}_2',$$

即可得

$$\begin{aligned} v_{1n}' &= \frac{1}{m_1 + m_2}[(m_1 - em_2)v_{1n} + m_2(1+e)v_{2n}], \\ v_{2n}' &= \frac{1}{m_1 + m_2}[m_1(1+e)v_{1n} + (m_2 - em_1)v_{2n}]; \end{aligned} \tag{8.6}$$

$$\begin{aligned} v_{1t}' &= v_{1t}, \\ v_{2t}' &= v_{2t}. \end{aligned} \tag{8.7}$$

(8.7)式是由于小球光滑，不考虑摩擦力的结果. 如果考虑摩擦力，则小球碰撞后要发生转动，计算将变得比较复杂. 由(8.6)和(8.7)，知道了 $\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$ 和 e 后，即可求得 $\boldsymbol{v}_1'$ 和 $\boldsymbol{v}_2'$. 不难证明，只有当 $e=1$ 时，碰撞前后的机械能才是守恒的. 这种情况称为**弹性碰撞**，我们在第三章中还要作详细讨论. $e<1$ 时，碰撞后能量小于碰撞前的能量，机械能不再守恒. 这种碰撞称为**非弹性碰撞**. $e=0$ 的碰撞称为**完全非弹性碰撞**，这时只有压缩阶段，没有恢复阶段，碰撞的结果使两个物体变成为一个物体.

习　题

2.1　用达朗贝尔方程写出习题 1.20 的运动微分方程.

2.2　用达朗贝尔方程写出习题 1.21 的运动微分方程.

2.3　用达朗贝尔方程写出习题 1.24 的运动微分方程.

2.4　用拉格朗日方程写出习题 1.2 的运动微分方程.

2.5　用拉格朗日方程写出习题 1.6 的运动微分方程.

2.6　用拉格朗日方程写出习题 1.20 的运动微分方程.

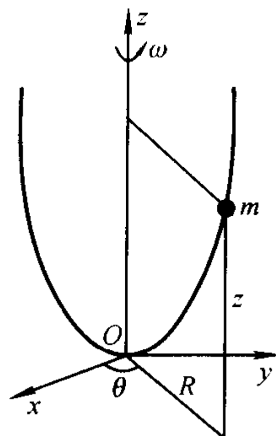
2.7　用拉格朗日方程写出习题 1.21 的运动微分方程.

2.8 用拉格朗日方程写出习题 1.24 的运动微分方程.

2.9 用拉格朗日方程写出习题 1.27 的运动微分方程.

2.10 用拉格朗日方程写出习题 1.28 的运动微分方程.

2.11 光滑刚性抛物线 $R^2=2pz$ 以恒定角速度 ω 绕铅直轴 z 旋转,其上套有质量为 m 的小环.(1) 试求小环的拉格朗日函数及运动方程;(2) 小环可稳定在抛物线某处时,$\omega=?$

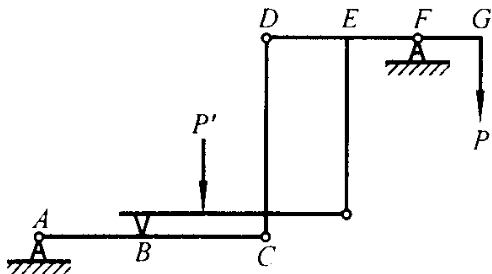


题 2.11 图

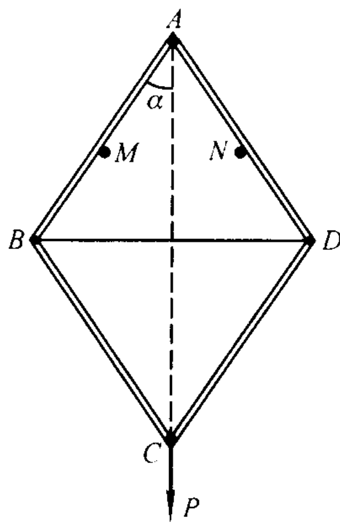
2.12 质量为 m 的质点约束在光滑的旋转抛物面 $x^2+y^2=az$ 的内壁运动,z 轴为铅直轴. 写出:(1)质点的运动方程;(2)质点作圆周运动所应满足的条件.

2.13 图中所示是一台磅秤的简化机构,试证明:若 $\dfrac{DF}{EF}=\dfrac{AC}{AB}$,则在平衡的情况下,秤锤的重量 P 与重物 P' 在秤台上的位置无关,且 $P'=P\dfrac{FG}{EF}$.

2.14 长度都为 l 的轻棒四根,光滑地联成一个菱形 $ABCD$. AB、AD 二边支于同一水平线上相距为 $2d$ 的二个钉子 M 和 N 上. BD 间用一轻绳联结,C 点上系一重量 P,设 A 点的顶角为 2α,求绳中的张力 F_T.



题 2.13 图



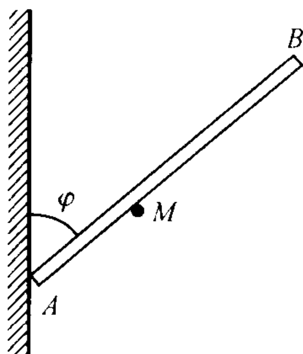
题 2.14 图

2.15 一水平的固定光滑钉子 M 与光滑铅直墙面的距离为 d,一长为 l 的均匀棒 AB 搁在钉子上,下端靠在墙上,求平衡时棒与墙所夹的角度 φ.

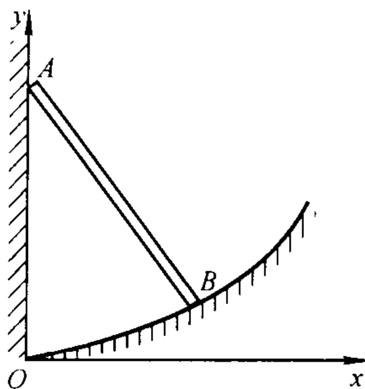
2.16 长为 $2l$ 的均匀杆 AB,一端靠在光滑的竖直墙上,另一端搁在光滑的固定曲面上,曲面的方程式为 $x^2+(2y-l)^2=l^2$,求杆的平衡位置.

2.17 在光滑的半径为 r 的圆柱体上放置着两根长为 $2l$,质量为 m 的用铰链连接的均匀长杆,求杆的平衡位置.

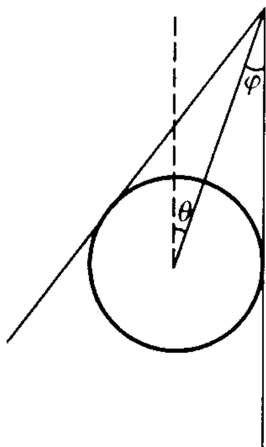
2.18 质量为 m_1 和 m_2 的两个质点用一固有长度为 l,重量可忽略的弹簧连接,放置于半径为 R 的光滑球壳内,求平衡时两质点的位置.



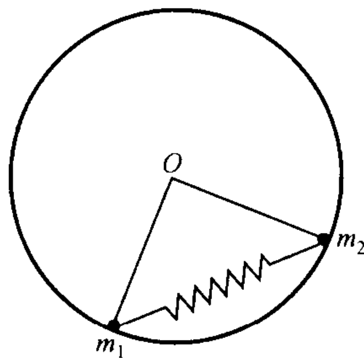
题 2.15 图



题 2.16 图

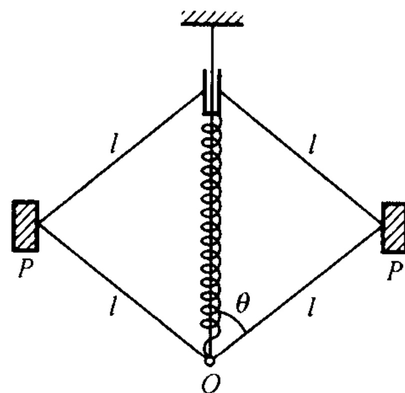


题 2.17 图



题 2.18 图

2.19 由两个相同的重物 P 和用铰链连接着的四根长度为 l 的轻棒及一个质量可忽略的弹簧 k 所组成的力学体系，其结构如图所示，体系处于铅直平面内，O 点是固定的，当图中的 $\theta=45°$ 时弹簧处于固有长度，求平衡时体系的位置.



题 2.19 图

2.20 写出质点在下列各势场中运动时的守恒量：(1)无限均匀半平面场；(2)两点源的场；(3)均匀圆锥体的场；(4)无限均匀圆柱螺旋线的场.

2.21 一质量为 m 的质点能在半径为 R 的铅直放置的圆形细管内无摩擦地滑动，圆管绕垂直直径以角速度 ω 转动. 写出质点的守恒量和它的运动微分方程.

***2.22** 一个粒子受到中心力

$$F=\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{\dot{r}^2-2r\ddot{r}}{c^2}\right)$$

的作用而在一个平面内运动，求产生这个力的广义势能，并由此找出粒子在平面内运动的拉格朗日函数.

2.23 质量为 m、电荷为 q 的粒子在轴对称电场 $\boldsymbol{E}=\frac{E_0}{R}\boldsymbol{e}_R$ 和均匀磁场 $\boldsymbol{B}=B_0\boldsymbol{k}$ 中运动.

写出粒子的拉格朗日函数和运动微分方程.

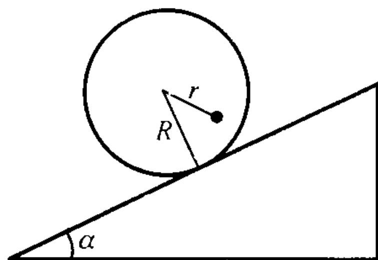
2.24 一质点在螺旋面上运动,螺旋面的方程为:

$$x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi, \quad z = b\varphi.$$

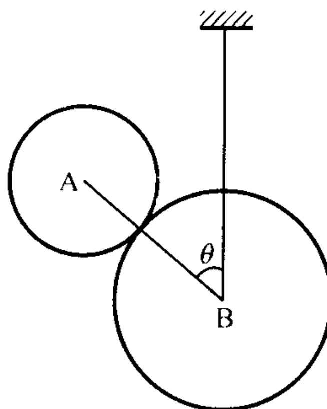
此质点并受轴向斥力,其大小和质点到轴的距离成正比.写出此质点的拉格朗日函数和运动方程.

***2.25** 一长为 l 的轻质刚性杆连接着质量为 m_1 和 m_2 的两个质点,原来绕质心 C 以角速度 ω 在水平面上转动,若突然将 C 点的轴去掉,同时将 m_2 固定,求此后 m_1 绕 m_2 转动的角速度 ω' 及体系受到的广义冲量 I.

***2.26** 半径为 R 的无质量圆盘嵌有一质量为 m 的质点,质点到圆盘中心的距离为 r,圆盘沿倾角为 α 的斜面滚下,求圆盘的运动规律.



题 2.26 图

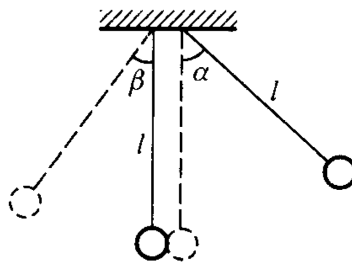


题 2.27 图

***2.27** 质量为 m 的光滑钢球 A 垂直下落,在速度为 $\boldsymbol{u}$ 时与另一质量为 m' 的静止悬挂着的钢球 B 发生弹性碰撞时,两球连心线与铅直线所夹的角度为 θ,求碰撞后两个球速度的大小和方向.

***2.28** 质量为 m_1 的光滑小球和另一质量为 m_2 的静止小球发生碰撞,碰撞后两球的速度方向相互垂直.求证 $m_1 = em_2$,e 为两球间的碰撞恢复系数.

***2.29** 质量为 m_1 和 m_2 的小球用等长的绳子挂起来,平衡时两球正好相切.现将其中一球拉过偏角 α,然后从静止状态释放,到达最低点撞击另一球后,使它产生的最大偏角为 β.设 α 和 β 已由实验测定,求碰撞系数 e.



题 2.29 图

2.30 弹性球自高为 h 处无初速地下落在水平面上,碰撞恢复系数为 e,求经过多少时间后球将停止跳动,并求在整个弹跳过程中,球所经过的总路程.

第三章　两体问题

本章首先讨论处理两体问题的一般方法——将两体问题简化为两个单粒子问题，然后讨论中心势场中单粒子运动的一般性质；在此基础上，着重讨论物理上三类典型的两体问题：束缚态问题、碰撞问题和衰变问题；介绍经典散射截面的概念后，又以刚球势为例，给出散射截面从质心坐标系到实验室坐标系的变换方法．本章全部采用拉格朗日方法来处理问题，这样做的主要目的，是为了和后继课程量子力学中相应的理论一致．

§3.1　两体问题化为单粒子问题

两个相互作用着的粒子所组成的体系的运动问题称为**两体问题**．典型的两体问题有三类：

(1) 束缚态问题．其特点是两体间始终保持有限距离．电子绕核，行星绕太阳的运动，是这类问题中最重要的例子．

(2) 散射或碰撞问题．其特点是：两个粒子从相距无穷远处逐渐接近，经过相互作用后各自改变了运动状态又相互分离至无穷远．电子或质子经过加速器加速后打到靶上或粒子彼此对撞，就是一种散射问题．

(3) 俘获和衰变问题．过程前后粒子数从 2 变为 1 或由 1 变为 2．粒子物理中这类问题是很多的．

通常两体问题可以得到严格的解．首先把两体运动分解为质心运动和相对于质心的运动两部分，总的运动可以看成是这两部分运动的合成．由于两体间的相互作用是内力，不会影响质心的运动．因此若不存在外场，则质心作惯性运动；如果还受外场的作用，则质心运动可由质点系的质心运动定理决定．所以质心运动部分可认为是已知的，需要讨论的只是相对运动部分．下面将证明，两个粒子的相对运动又可约化为一个单粒子的运动．在本章中，我们用 x、y、z 表示两个粒子之间相对运动的坐标，而用 x_0、y_0、z_0 表示相应惯性系中的坐标．

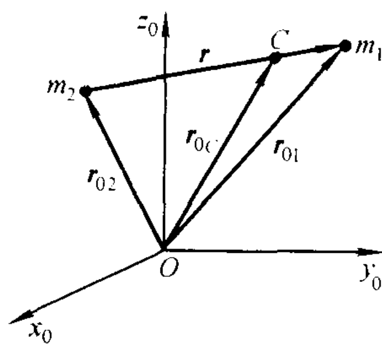


图 3.1

如图 3.1 所示,设 $\boldsymbol{r}_{01}$ 和 $\boldsymbol{r}_{02}$ 为两个粒子在实验室系(惯性系)中的位置矢量,m_1 和 m_2 为它们各自的质量,体系的动能则为

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{\boldsymbol{r}}_{01}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\boldsymbol{r}}_{02}^2. \tag{1.1}$$

体系的势能包括两部分:一部分是两个粒子在外场中的势能 $V^{(e)}$,假定它只与体系的质心位置

$$\boldsymbol{r}_{0C} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_{01} + m_2\boldsymbol{r}_{02}}{m_1 + m_2} \tag{1.2}$$

有关;另一部分是两个粒子的相互作用势能 $V^{(i)}$,假定它只与两个粒子间的相对位置

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{01} - \boldsymbol{r}_{02} \tag{1.3}$$

有关. 因此体系总的势能为

$$V = V^{(e)}(\boldsymbol{r}_{0C}) + V^{(i)}(\boldsymbol{r}). \tag{1.4}$$

两个粒子的自由度为 6,我们取 $\boldsymbol{r}_{0C}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 为广义坐标. 由(1.2)和(1.3)式可解得

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_{01} = \boldsymbol{r}_{0C} + \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\boldsymbol{r}, \\ \boldsymbol{r}_{02} = \boldsymbol{r}_{0C} - \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\boldsymbol{r}. \end{cases} \tag{1.5}$$

将(1.5)代入(1.1)式,得体系的拉格朗日函数为

$$\begin{aligned} L = T - V &= \frac{1}{2}m_1\left(\dot{\boldsymbol{r}}_{0C} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\dot{\boldsymbol{r}}\right)^2 + \\ &\quad \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\boldsymbol{r}}_{0C} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\dot{\boldsymbol{r}}\right)^2 - V^{(e)}(\boldsymbol{r}_{0C}) - V^{(i)}(\boldsymbol{r}) \\ &= L_1(\dot{\boldsymbol{r}}_{0C}, \boldsymbol{r}_{0C}) + L_2(\dot{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{r}), \end{aligned} \tag{1.6}$$

其中

$$L_1 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\boldsymbol{r}}_{0C}^2 - V^{(e)}(\boldsymbol{r}_{0C}), \tag{1.7}$$

$$L_2 = \frac{1}{2}m_r\dot{\boldsymbol{r}}^2 - V^{(i)}(\boldsymbol{r}), \tag{1.8}$$

而

$$m_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{1.9}$$

所以选取质心位置 $\boldsymbol{r}_{0C}$ 和两个粒子间的相对位置 $\boldsymbol{r}$ 为广义坐标后,两体问题的拉格朗日函数分解为反映质心运动的拉格朗日函数 $L_1(\boldsymbol{r}_{0C}, \dot{\boldsymbol{r}}_{0C})$ 和反映两个粒子间相对运动的拉格朗日函数 $L_2(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}})$ 两个独立部分. 这样就把两体问题分解

为两个单粒子问题. 其中相对运动部分相当于质量为 m_r 的单粒子在势场 $V^{(i)}(\boldsymbol{r})$中的运动,m_r 称为**折合质量**.

需要指出:上述结论是在外场 $V^{(e)}$ 只和质心位置 $\boldsymbol{r}_{0C}$ 有关,内场 $V^{(i)}$ 只和相对位置 $\boldsymbol{r}$ 有关的假定下得到的,一般来说后者总是成立的,但前者有时不一定成立. 但如果外场强度比内场弱得多,以致完全可以忽略,那么上述结论依然成立,这时质心作惯性运动,物理上碰到的多数情形正是这一类问题.

最重要的一类两体相互作用势只和两个粒子的相对距离 r 有关,而和它们的相对方向无关,即 $V^{(i)}(\boldsymbol{r})=V(r)$. 这种势场称为**中心势场**. 今后如无特别说明,我们将只讨论这种势场.

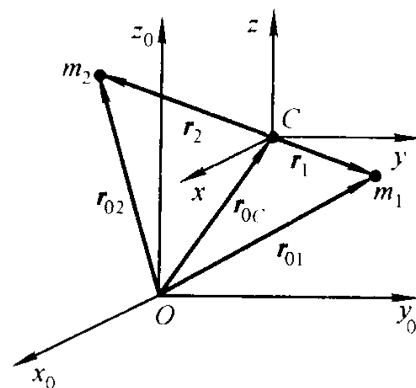


图 3.2

两个粒子的相对运动既可以用一个粒子相对于另一个粒子的运动来描述,也可以用两个粒子各自相对于质心的运动来描述. 后一种描述方法称为粒子在质心系中的运动. 如图 3.2 所示,我们取两个坐标系,一个是固定在实验室中的坐标系 $Ox_0y_0z_0$,即**实验室坐标系**. 另一个坐标系 $Cxyz$ 的坐标原点取在两个粒子的质心 C 上,坐标轴的方向和前者平行,称为**质心坐标系**. 如果我们用 $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$ 表示第一个粒子和第二个粒子在质心坐标系中的位置,则

$$\begin{cases}\boldsymbol{r}_{01}=\boldsymbol{r}_{0C}+\boldsymbol{r}_1,\\ \boldsymbol{r}_{02}=\boldsymbol{r}_{0C}+\boldsymbol{r}_2.\end{cases}\tag{1.10}$$

两个粒子间的相对位置 $\boldsymbol{r}$ 则与坐标系无关:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{01}-\boldsymbol{r}_{02}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2.\tag{1.11}$$

将(1.10)式和(1.5)式比较,可知

$$\begin{cases}\boldsymbol{r}_1=\dfrac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{r},\\[2ex] \boldsymbol{r}_2=-\dfrac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}.\end{cases}\tag{1.12}$$

上述表明两个粒子在质心系中的位置 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$,与两个粒子的相对位置 $\boldsymbol{r}$ 只差一个比例常数,因此知道了一个粒子相对于另一个粒子的运动,也就知道了两个粒子各自相对于质心的运动. 今后我们说到相对运动,不再区分是一个粒子相对另一个粒子的运动,还是它们相对于质心的运动,相对运动的动能既可以用 $\frac{1}{2}m_r\dot{r}^2$ 表示,也可以用 $\frac{1}{2}m_1\dot{r}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{r}_2^2$ 表示,利用(1.12)式很容易证明两者是一样的.

§3.2 在中心势场中单粒子的运动 有效势能

现在我们来讨论在中心势场 $V(r)$中单粒子的运动问题. 粒子在中心势场 $V(r)$中所受的力为中心力:

$$\boldsymbol{F} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi\right)$$

$$= -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\boldsymbol{e}_r = F(r)\boldsymbol{e}_r. \tag{2.1}$$

F 的大小只依赖于r,它的方向与矢径 $\boldsymbol{r}$ 的方向一致或相反. 在§1.5 中我们曾经指出,在中心势场中的粒子必作平面运动,可取平面极坐标,所以粒子的拉格朗日函数为

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r). \tag{2.2}$$

上述拉格朗日函数不含时间 t,因此粒子能量守恒:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = \text{常数}. \tag{2.3}$$

拉格朗日函数不含坐标 θ,因此对应的广义动量即角动量 L 守恒:

$$L = mr^2\dot{\theta} = \text{常数}. \tag{2.4}$$

注意不要把上式中的 L 与拉格朗日函数相混淆. 将(2.4)代入(2.3)得

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r). \tag{2.5}$$

这样就把两个变量 r、θ 的运动问题约化为单个变量 r 的运动问题了. 由(2.5)得

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(r)] - \frac{L^2}{m^2r^2}}. \tag{2.6}$$

对上式积分得

$$t = \pm\int\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(r)] - \frac{L^2}{m^2r^2}}}. \tag{2.7}$$

由(2.7)式可解得 r 为 t 的显函数 $r = r(t)$,代回(2.4)式并积分,得

$$\theta = \int\mathrm{d}\theta = \int\frac{L}{mr^2(t)}\mathrm{d}t. \tag{2.8}$$

(2.7)和(2.8)就是粒子的运动方程.

由(2.4)和(2.6)两式中消去 dt,并积分,得

$$\theta = \int \mathrm{d}\theta = \int \frac{\frac{L}{r^2}\mathrm{d}r}{\sqrt{2m[E - V(r)] - \frac{L^2}{r^2}}}. \tag{2.9}$$

这就是粒子的轨道所满足的方程式.

(2.3)和(2.4)的能量守恒和角动量守恒,以及由此导出的运动方程(2.7)和(2.8)及轨道方程(2.9),解决了在中心势场中单粒子的运动问题. 但是应该指出,只有少数几种函数 $V(r)$可以使(2.7)、(2.8)和(2.9)式具有解析形式的解.

如果我们只需要了解运动的主要特征,也可以不必通过上述积分,只要对 θ 和 r 的变化作些定性的讨论,就可以得到许多有用的结论.

首先看 θ 变化的情况. 由(2.4)式可知 $\dot{\theta}$ 总是随时间单调地变化的,$\dot{\theta}$ 的值和 r^2 成反比,离中心远时粒子绕中心旋转慢,近时旋转快.

其次看 r 的变化情况. (2.5)式指出,径向部分 r 的运动,可以看成粒子在有效势场

$$V_{\mathrm{eff}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \tag{2.10}$$

中的一维运动,量 $L^2/2mr^2$ 称为**离心势能**. r 变化的范围,由(2.5)式中 $\dot{r}=0$ 的条件决定,此条件为

$$V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} = E. \tag{2.11}$$

解此方程得到的 r 是轨道的"转变点", 表示 $r(t)$从增加变为减少, 或者相反.

如果 r 变化的区间仅由一个条件$r \geqslant r_{\min}$限制的话,则粒子的运动在空间上是无限的,即它的轨道从无穷远处来,到了 $r_{\min}$处后又向无穷远处离去. 如果 r 的变化区间有两个边界$r_{\min}$和 $r_{\max}$,那么轨道位于两个圆 $r = r_{\min}$和 $r = r_{\max}$所限制的环域内,但这并不意味着轨道一定是闭合曲线. 在 r 从$r_{\max}$变到 $r_{\min}$再回到 $r_{\max}$这一时间间隔内,矢径转过了一个角度 $\Delta\theta$. 由(2.9),它等于

$$\Delta\theta = 2\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{L\mathrm{d}r/r^2}{\sqrt{2m(E - V) - \frac{L^2}{r^2}}}. \tag{2.12}$$

轨道闭合的条件是 $\Delta\theta = 2\pi m/n$. 式中 m 和 n 是整数. 在这个条件下,经 n 个周期的时间,粒子的矢径 $\boldsymbol{r}$ 在转了 m 个整圈后将与自己最初的位置重合,即轨

道闭合.

一般来说,轨道闭合的情况是罕见的. 在任意形式的 $V(r)$ 的情况下,$\Delta\theta$ 与 2π 之比并不是有理数,因此在一般情况下,有限运动的轨道并不是闭合的. 在无限长的时间进程中,轨道无数次经过 r_{max} 和 r_{min} 的位置而填满由两个圆所限制的整个圆环,如图 3.3 所示.

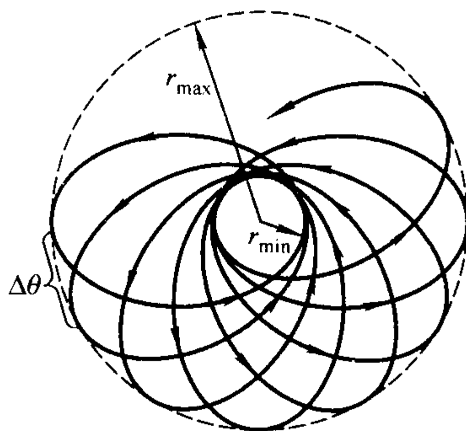


图 3.3

只有在两类中心场中,有限运动的轨道才是闭合的,这就是和 $1/r$ 及 r^2 成正比的势场. 前者如万有引力、库仑场,是最重要的一类中心势场,我们将在下节详细讨论;后者则和空间谐振子相当.

【例 1】 求在中心势场 $V=\frac{1}{2}kr^2$ 内粒子(空间谐振子)的运动轨道.

解: 选取粒子的运动平面为 Oxy 平面,则体系的拉格朗日函数为

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-\frac{1}{2}k(x^2+y^2).$$

代入拉格朗日方程得

$$\begin{cases} m\ddot{x}+kx=0, \\ m\ddot{y}+ky=0. \end{cases}$$

其解为

$$\begin{cases} x=a\cos(\omega t+\alpha), \\ y=b\cos(\omega t+\beta). \end{cases}$$

或者令 $\varphi=\omega t+\alpha,\delta=\beta-\alpha$,则

$$\begin{cases} x=a\cos\varphi, \\ y=b\cos(\varphi+\delta)=b\cos\delta\cos\varphi-b\sin\delta\sin\varphi. \end{cases}$$

由此二式及 $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$,得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\delta=\sin^2\delta.$$

这就是粒子的轨道方程,它是中心在坐标原点的椭圆;或者,当 $\delta=0$、π 时,$y=\pm\frac{b}{a}x$,轨道为直线.

【例 2】 讨论粒子在吸引势 $V=-\alpha/r^3$ 中的运动情况.

解: 从数学上严格解这个问题,要求计算椭圆积分. 但是利用有效势能的概念,只要通过简单的数学运算,即可大致了解粒子运动的情况.

粒子的有效势能为

$$V_{eff}(r)=\frac{L^2}{2mr^2}-\frac{\alpha}{r^3}.$$

上式右边第一项为离心势,第二项为吸引势. 考虑到:

(1) 曲线渐近行为

$$r\to\infty,\ V_{\mathrm{eff}}\to 0;$$
$$r\to 0,\ V_{\mathrm{eff}}\to -\infty.$$

(2) 曲线零点

由 $V_{\mathrm{eff}}(r)$的表达式解得

$$r = r_0 = \frac{2m\alpha}{L^2}$$

时,V_{eff}等于零.

(3) 曲线极值

由$\dfrac{\mathrm{d}V_{\mathrm{eff}}(r)}{\mathrm{d}r}=0$ 解得

$$r = r_{\mathrm{m}} = \frac{3m\alpha}{L^2}$$

时,V_{eff}取极大值:

$$(V_{\mathrm{eff}})_{\max} = V_{\mathrm{eff}}(r_{\mathrm{m}}) = \frac{L^6}{54m^3\alpha^2}.$$

根据以上几点,我们即可作出势能曲线的大体图形如图 3.4 所示.

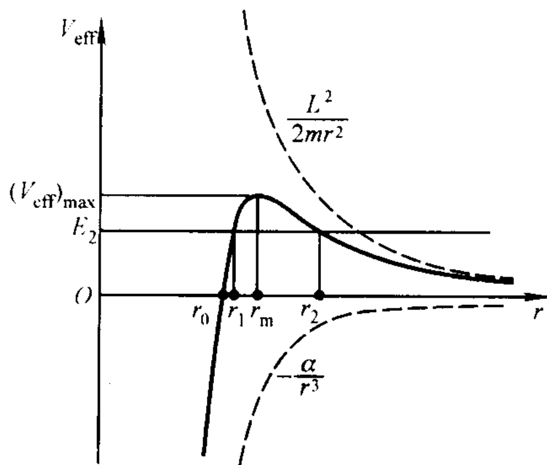


图 3.4

利用有效势能,能量守恒条件可表示为

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\mathrm{eff}}(r) = E.$$

由于 $m\dot{r}^2/2$ 恒大于或等于零,因此要使上式成立,必须

$$E \geqslant V_{\mathrm{eff}}(r).$$

根据这一要求,从图 3.4 中可以看出,粒子不可能出现在等效势能曲线下面的区域. 因此:

(1) 若 $E=E_1>(V_{\mathrm{eff}})_{\max}$,粒子可在全空间运动. 当 $\dot{r}>0$ 时,粒子飞向无穷远,变为自由粒子;$\dot{r}<0$ 时,粒子飞向中心,最后被力心所俘获,粒子不可能有闭合的轨道.

(2) 若 $E=E_2$,而 $0<E_2<(V_{\mathrm{eff}})_{\max}$,由图所示,粒子只能出现在 $r=r_1$ 的圆内或 $r=r_2$

的圆外．在中间区域 $r_1<r<r_2$ 的环域内粒子是禁戒的．若初始时刻粒子出现在 $r=r_1$ 的圆内，则 $\dot{r}<0$ 时，粒子直接被吸引至力心；当 $\dot{r}>0$ 时，粒子先飞到 $r=r_1$ 的圆周上，再折回直到中心为止．粒子不可能停留在 $r=r_1$ 的圆周上，因为在 $r=r_1$ 处，有效势能曲线的斜率 $\frac{\mathrm{d}V_{\mathrm{eff}}}{\mathrm{d}r}>0$．所以粒子所受的有效力 $F_{\mathrm{eff}}=-\frac{\mathrm{d}V_{\mathrm{eff}}}{\mathrm{d}r}<0$，是引力，即"离心力"不足以抵消吸引力，所以只要 $0<E<(V_{\mathrm{eff}})_{\max}$，$r\leqslant r_1$，不论粒子初始时刻是向内飞的还是向外飞的，最终都将被力心所俘获．同样，若初始时 $0<E<(V_{\mathrm{eff}})_{\max}$，而 $r\geqslant r_2$，不管粒子初速度的方向如何，最终将飞向无穷远处而成为自由粒子．

(3) 若 $E=E_3<0$，粒子只能出现在 $r=r_{\max}$ 的圆内，并最终被中心所俘获，其中 $r_{\max}$ 是 $E=E_3$ 的直线和有效势能曲线的交点坐标．

(4) 以上几种情况粒子都没有稳定的闭合轨道，但如果总能量正好等于有效势能的极大值 $E=(V_{\mathrm{eff}})_{\max}$，则粒子将以半径 r_{m} 作稳定的匀速圆周运动，因为在极值点上，粒子所受到的力 $F_{\mathrm{eff}}=-\frac{\partial V_{\mathrm{eff}}}{\partial r}=0$，吸引势和离心势的力正好互相抵消．

§3.3 与距离成反比的中心势场

与距离 r 成反比的中心势场是实际问题中最常见的一种势场，理论上可严格求得解析解．牛顿引力势和库仑静电势都属于这种势场．前者为吸引势，后者既可以是吸引势，也可以是排斥势．

我们先研究吸引势

$$V(r)=-\frac{\alpha}{r},\tag{3.1}$$

其中 $\alpha>0$．在上节例 2 中，我们曾利用有效势能曲线对粒子在 α/r^3 的吸引势场中的运动情况作出了定性描述，但对这种定性描述和粒子真实运动情况之间的差别无法作出估计．现在我们仍用有效势能曲线对粒子运动情况作定性描述，然后再严格求解运动方程和轨道方程，把两者的结论作比较，就可对这类问题中有效势能曲线所能起的作用作出估价．

类似上节例 2 的讨论，我们先画出有效势能曲线的大致形状．和(3.1)式相对应的有效势能为

$$V_{\mathrm{eff}}(r)=-\frac{\alpha}{r}+\frac{L^2}{2mr^2}.\tag{3.2}$$

它的主要特征是：

(1) 当 $r\to0$ 时，$V_{\mathrm{eff}}(r)\to+\infty$，$r\to\infty$ 时，$V_{\mathrm{eff}}(r)\to0^-$．

(2) 曲线在

$$r=r_{\mathrm{m}}=\frac{L^2}{m\alpha}$$

处存在一个极小值. 将 r_m 代入(3.2)得

$$(V_{\text{eff}})_{\min} = -\frac{\alpha^2 m}{2L^2}. \tag{3.3}$$

(3) 曲线有零点,零点位置 r_0 是

$$r_0 = \frac{L^2}{2m\alpha}.$$

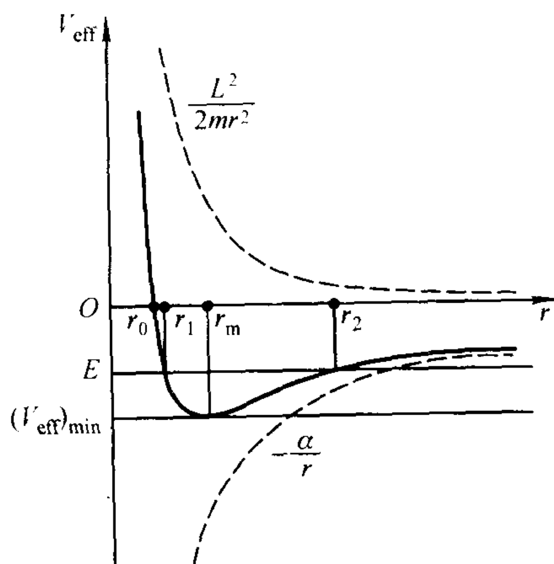


图 3.5

根据上述几点,有效势能曲线的大致形状如图 3.5 所示. 根据此曲线,即可对粒子运动的情况作出定性描述:

(1) 当$(V_{\text{eff}})_{\min} \leqslant E < 0$ 时,根据 $E \geqslant V_{\text{eff}}$ 的要求,可知粒子只能限制在 $r_1 < r < r_2$ 的环域内运动,粒子既不会被吸引到力心去,也不会飞向无穷远而成为自由粒子,这种状态称为**束缚态**. 电子绕核和行星绕太阳就是这种运动状态. r_1 和 r_2 通常称为**近日点**和**远日点**,它们是等能线与有效势能曲线的两个交点的坐标. 极限情况,当 $r_1 = r_2 = r_m$ 时,即 $E = (V_{\text{eff}})_{\min}$ 时,轨道是以 r_m 为半径的圆.

(2) 当 $E \geqslant 0$ 时,近日点 r_1 仍然存在,所以粒子仍然不能被吸引至力心,但远日点 r_2 却移到无穷远去了,因此粒子将在离心势的作用下飞向无穷远而成为自由粒子.

定性分析只能到此为止,更详细的情况必须通过定量地解运动方程才能得到.

下面我们先来解轨道方程. 将(3.1)代入(2.9)式,得轨道微分方程为

$$\theta = \int \frac{L\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{L^2}{r^2}}}$$

$$= \arccos\frac{\frac{L}{r}-\frac{m\alpha}{L}}{\sqrt{2mE+\frac{m^2\alpha^2}{L^2}}} + 常数.$$

适当选择 θ 的计算起点,使得上式中的常数为零,并引入符号

$$p = \frac{L^2}{m\alpha}, \qquad e = \sqrt{1+\frac{2EL^2}{m\alpha^2}}, \tag{3.4}$$

则轨道方程可改写为

$$r = \frac{p}{1+e\cos\theta}. \tag{3.5}$$

这是一个以坐标原点为焦点的圆锥曲线方程,p 和 e 是圆锥曲线的两个参数:p 为**半通径**,e 为**偏心率**. 从(3.5)可以看出,$\theta=0$ 时,$r=r_{\min}$,这一点就是**近日点**. 因此轨道方程(3.5)是取了近日点作为角度 θ 的起始点的方程.

我们知道,圆锥曲线可按偏心率 e 的值分为三类. 因此根据(3.4)式,相应的亦可由粒子的能量 E 将轨道分为三类. 它们是:(a) $E<0$ 时,$e<1$,椭圆;(b) $E=0$ 时,$e=1$,**抛物线**;(c) $E>0$ 时,$e>1$,**双曲线**,如图 3.6 所示.

我们着重讨论一下椭圆轨道的情形. 行星绕太阳,电子绕原子核,都属于这种情形. 从几何观点来看,只要椭圆的半长轴 a 和半短轴 b 确定了,椭圆的性质就完全确定了. a 和 b 称为椭圆的**几何参数**,而方程(3.5)是以 L 和 E(通过 p 和 e)为参数的椭圆方程. L 和 E 称为**椭圆轨道的动力参数**. 因此我们只要找到

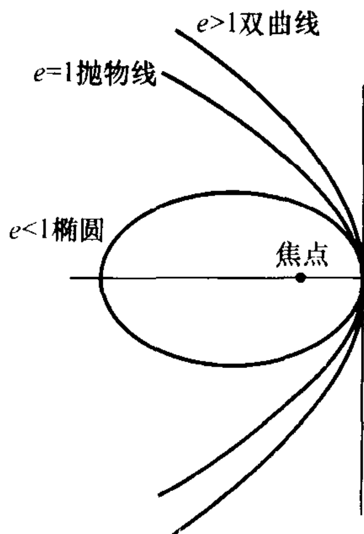


图 3.6

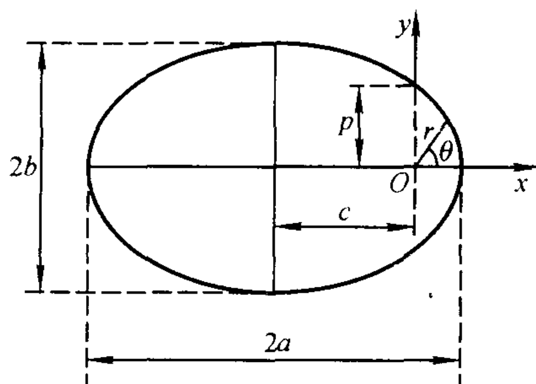


图 3.7

L 和 E 与 a 和 b 这两类参数之间的关系，椭圆轨道的性质就完全确定了．下面我们来找出它们之间的关系．

椭圆的偏心率 $e=c/a$，c 为焦点至椭圆中心的距离，且 $c^2=a^2-b^2$（如图3.7所示）．因此椭圆的近日点 $r_{\min}$ 可表示为

$$r_{\min}=a-c=a(1-e).$$

另一方面由(3.5)式，

$$r_{\min}=r\Big|_{\theta=0}=\frac{p}{1+e}.$$

联合上面两式，得

$$a=\frac{p}{1-e^2}. \tag{3.6}$$

将(3.4)中的 p 和 e 的值代入上式化简后即得

$$a=\frac{\alpha}{2|E|}. \tag{3.7}$$

椭圆半短轴 b 与 a 和 e 的关系为

$$b=\sqrt{a^2-c^2}=a\sqrt{1-e^2}.$$

将(3.4)和(3.6)代入上式化简得

$$b=\frac{L}{\sqrt{2m|E|}}. \tag{3.8}$$

(3.7)告诉我们一个重要的结论：粒子的能量只和轨道的半长轴 a 有关，与椭圆的形状无关．一组椭圆，如果半长轴 a 都是一样的，则不论 e 值如何，能量都相同，这一事实在原子结构中有重要的意义．

我们再来求粒子沿椭圆轨道运动一周所需的时间，即周期 T．由(2.4)式得

$$\begin{aligned}T&=\int_0^{2\pi}\frac{mr^2}{L}\mathrm{d}\theta=\frac{m}{L}2\pi ab\\&=\pi a\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{\alpha}a^3}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

其中利用了 $\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\theta=$ 椭圆面积 $=\pi ab$．(3.9)式表明周期的平方和能量绝对值的三次方成反比，或者与半长轴的三次方成正比．这一结论通常称为**开普勒(Kepler)第三定律**，最早是由开普勒总结前人对天体观察的数据得出的，它是牛顿发现万有引力定律的主要依据．

下面我们来解粒子的运动方程，即求 r 和 θ 对时间的依赖关系．为此需要做(2.7)和(2.8)式的两个积分．我们将用参数方程来表示，它比给出函数 $r(t)$ 和 $\theta(t)$ 要方便得多．

先讨论椭圆轨道的情形．利用(3.4)和(3.6)式，可把(2.7)式写成为

$$t=\sqrt{\frac{m}{2|E|}}\int\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{-r^2+\frac{\alpha}{|E|}r-\frac{L^2}{2m|E|}}}$$

$$=\sqrt{\frac{ma}{\alpha}}\int\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{a^2e^2-(r-a)^2}}.$$

引入参数 ξ，令

$$r-a=-ae\cos\xi,$$

则上述积分变为

$$t=\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}\int(1-e\cos\xi)\mathrm{d}\xi=\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(\xi-e\sin\xi)+\text{常数}.$$

如果我们选取粒子通过近日点 $r=a(1-e)$时，$t=0$，则上述积分常数将为零．最后我们得 r 依赖于t 的参数表示式：

$$\begin{cases}r=a(1-e\cos\xi),\\ t=\sqrt{\dfrac{ma^3}{\alpha}}(\xi-e\sin\xi).\end{cases}\tag{3.10}$$

不难把上式变换到直角坐标中去．以焦点为坐标原点的直角坐标可表示为：

$$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta=\sqrt{r^2-x^2}.\end{cases}$$

而由(3.5)式，$p-r=re\cos\theta$，由(3.6)式，$p=a(1-e^2)$．因此得

$$\begin{cases}x=a(\cos\xi-e),\\ y=a\sqrt{1-e^2}\sin\xi.\end{cases}\tag{3.11}$$

对于双曲线轨道，可完全类似地进行计算，其结果为：

$$\begin{cases}r=a(e\operatorname{ch}\xi-1),\\ t=\sqrt{\dfrac{ma^3}{\alpha}}(e\operatorname{sh}\xi-\xi),\end{cases}\tag{3.12}$$

$$\begin{cases}x=a(e-\operatorname{ch}\xi),\\ y=a\sqrt{e^2-1}\operatorname{sh}\xi.\end{cases}\tag{3.13}$$

以上讨论的都是吸引势的情形．下面简单讨论一下粒子在排斥势场中运动的情况．此时

$$V=\frac{\alpha}{r}\quad(\alpha>0).\tag{3.14}$$

因而有效势能为

$$V_{\text{eff}}=\frac{\alpha}{r}+\frac{L^2}{2mr^2}.\tag{3.15}$$

当 r 由零变到无穷大时，V_{eff}将单调下降，永远为正．不管初始条件如何，粒子将飞向无穷远处成为自由粒子，不可能以束缚态的形式出现，更不会被力心所俘获．这一结论并不是$\frac{\alpha}{r}$的排斥势场所特有的，实际上对任何排斥势场都成立．粒子的具体轨道则和排斥势的形式有关．如引用(3.4)所定义的参数 p 和 e，则在$\frac{\alpha}{r}$的排斥势场中粒子的轨道方程为

$$r = \frac{-p}{1 - e\cos\theta}. \tag{3.16}$$

这就是双曲线的另一支，如图 3.8 所示．

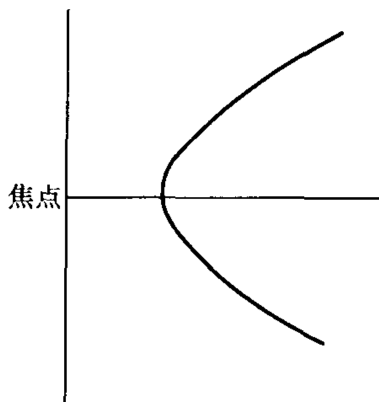


图 3.8

*§ 3.4　中心势场中粒子运动轨道的稳定性

粒子在中心势场中运动时，我们最感兴趣的是它的轨道．我们总希望能求得确切的轨道方程．例如通过上节的讨论，我们知道在 $V=\pm\frac{\alpha}{r}$的势场中，粒子的轨道必为二次曲线．但多数情况下不能求得解析形式的轨道方程，这时我们往往找出粒子在空间可能出现的区域，在 § 3.2 中对此作过一些讨论．另外还有轨道的稳定性问题．本节专门讨论这个问题．

首先要指出，轨道的稳定性和轨道闭合是两个概念．闭合轨道可以是不稳定的．例如 § 3.2 中所述的粒子在 $V=-\frac{\alpha}{r^3}$的势场中运动时，当 $E=(V_{\text{eff}})_{\max}$时，粒子可以作半径为 $r=r_{\text{m}}=\frac{3m\alpha}{L^2}$的圆周运动，是闭合轨道．但这个轨道显然是不稳定的．如果给粒子以任何一点扰动，使 r 稍微增加，粒子将偏离 r_{m} 越来越远，最终飞向无穷远处．反之，如果粒子受到某种扰动使 r 稍微减小，则粒子将越来越向力心靠拢，最终被力心所俘获．另一方面，不闭合的轨道也可以是稳定的．例如行星绕太阳，电子绕核的运动等，由于存在某种附加的微小势场或考虑相对论效应，轨道是不闭合的椭圆，但从太阳系诞生以来已经历了几十亿年，以及原子结构的高度稳定性，都可以说这样的轨道是稳定的．

那么中心势场中粒子轨道稳定性的含义究竟是什么呢？简单地可以这样来表述：在一定的初始条件下，粒子在中心势场 $V(r)$中运动的轨道方程为 $r_0=r_0(\theta)$，由于初始条件的微小变化或势场本身出现了一个短暂的扰动，使粒子偏

离原轨道 r_0 变为 r，如果 r 始终保持在 r_0 附近作小振动，则这种轨道是稳定的；反之，若随着时间增加 r 偏离 r_0 越来越大，这种轨道则是不稳定的.

下面我们来讨论，对中心势 $V(r)$，或相应的中心力 $F(r)=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$，满足什么条件时，粒子的轨道才是稳定的. 为此我们先来建立轨道的微分方程. 令 $u=\frac{1}{r}$，则由 $mr^2\dot{\theta}=L$ 得

$$\dot{\theta}=\frac{L}{m}u^2,$$

$$\dot{r}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta}=-\frac{L}{m}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta},$$

$$\ddot{r}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{L}{m}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)=-\frac{L^2}{m^2}u^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}.$$

将它们代入 $m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=F(r)$，得

$$u^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+u\right)=-\frac{m}{L^2}F. \tag{4.1}$$

这个方程称为**比耐**(Binet)**公式**，就是粒子在中心力 $F(r)$ 作用下的轨道微分方程.

设粒子在一定初始条件下在势场 $V(r)$ 中的轨道为 $u=u_0$. 现在由于初始条件有些改变，或者由于势场有一微小改变 ΔV(例如哈雷彗星进入地球轨道对地球的扰动)，使粒子的轨道稍微偏离原轨道变而为

$$u=u_0+\varepsilon. \tag{4.2}$$

式中 ε 是一个小量. 将(4.2)代入(4.1)得

$$(u_0^2+2u_0\varepsilon+\varepsilon^2)\left(\frac{\mathrm{d}^2u_0}{\mathrm{d}\theta^2}+\frac{\mathrm{d}^2\varepsilon}{\mathrm{d}\theta^2}+u_0+\varepsilon\right)=-\frac{m}{L^2}F(u_0+\varepsilon). \tag{4.3}$$

将 $F(u_0+\varepsilon)$ 在 u_0 附近展开为泰勒级数：

$$F(u_0+\varepsilon)=F(u_0)+\left.\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u}\right|_{u_0}\varepsilon+\cdots,$$

代入(4.3)式，保留到 ε 的一级项，得 ε 所满足的方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2\varepsilon}{\mathrm{d}\theta^2}+A\varepsilon=0, \tag{4.4}$$

其中

$$A=3+\frac{2}{u_0}\frac{\mathrm{d}^2u_0}{\mathrm{d}\theta^2}+\frac{m}{u_0^2L^2}\left.\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u}\right|_{u_0}. \tag{4.5}$$

若 $A=0$，则 ε 将随 θ(从而随 t)线性增加，若 $A<0$，则 ε 随 t 指数增加. 这两种情况轨道都是不稳定的. 当 $A>0$ 时，ε 作简谐振动，轨道是稳定的. 利用比耐

公式，将

$$\frac{d^2 u_0}{d\theta^2} = -\frac{m}{u_0^2 L^2} F(u_0) - u_0$$

代入(4.5)式，去掉下标0，最后得轨道稳定性的条件为

$$A = 1 - \frac{2m}{L^2} r^3 F(r) - \frac{m}{L^2} r^4 \frac{dF}{dr} > 0, \tag{4.6}$$

或

$$A = 1 + \frac{2m}{L^2} r^3 \frac{dV}{dr} + \frac{m}{L^2} r^4 \frac{d^2 V}{dr^2} > 0. \tag{4.7}$$

让我们用这个判别式分析一下前面已讨论过的几种势场中粒子轨道的稳定性问题：

(1) $V = \pm \frac{\alpha}{r}$，这时

$$A = 1 > 0.$$

这表明不论初始条件及附加的短暂的微扰势的性质如何，与距离成反比的中心势场中的粒子的轨道永远是稳定的. 这就解释了行星轨道的稳定性和原子结构的力学稳定性.

(2) $V = -\frac{\alpha}{r^3}$，这时

$$A = 1 - \frac{6m\alpha}{L^2 r} = 1 - 3\frac{r_m}{r}.$$

稳定性条件 $A>0$ 变为

$$r > 3r_m.$$

即在离力心远处，轨道是稳定的，在近处包括在 $r = r_m$ 处作圆周运动时，轨道都是不稳定的.

(3) $V = kr^2$，这时

$$A = 1 + \frac{6mk}{L^2} r^4 > 0.$$

轨道永远稳定.

如果已知粒子在中心势场中以圆形轨道运动，则稳定性条件可用一个很简单的方程给出. 根据§3.2的讨论，圆形轨道必在 $V_{eff}(r)$ 取极值处出现，极小值为稳定轨道. 因此圆形轨道稳定性的条件为

$$\begin{cases} \dfrac{dV_{eff}}{dr} = 0, \\ \dfrac{d^2 V_{eff}}{dr^2} > 0. \end{cases}$$

将 $V_{\text{eff}} = \dfrac{L^2}{2mr^2} + V$ 代入,并将第一式代入第二式,最后得

$$3\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} + r\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}r^2} > 0, \tag{4.8}$$

或

$$-3F - r\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r} > 0. \tag{4.9}$$

这两个判别式也可通过将圆周轨道的条件代入(4.6)或(4.7)式得到.

§3.5 弹性碰撞

如果两个粒子在碰撞前后内部状态不发生改变,则这种碰撞称为**弹性碰撞**或**弹性散射**.

由于碰撞过程相互作用的时间很短,外场所产生的影响很小,因此可以认为体系不受外力影响,动量和角动量都守恒. 对于弹性碰撞,由于每个粒子内部状态不变(因此内能不变),所以机械能也是守恒的. 并且由于粒子间的相互作用只有在碰撞的一瞬间是重要的,在碰撞前和碰撞后,均可认为两个粒子相距无穷远,相互作用可以忽略,因此碰撞过程中机械能守恒又可表示为过程前后的动能守恒. 非弹性碰撞粒子内部的状态发生了改变,机械能不再守恒,它已不是一个纯力学问题,我们这里不予讨论.

弹性碰撞要讨论两个问题:(1)不考虑两个粒子相互作用的细节,只根据守恒定律的要求,找出碰撞前后粒子运动所必须满足的条件. 这类问题常称**碰撞的运动学问题**. (2) 如果相互作用是已知的,则由碰撞前的粒子状态可唯一的确定碰撞后的粒子状态,或者反之,由碰撞前后的粒子状态,倒过来推算出两个粒子间的相互作用 $V(r)$的函数形式. 这类问题称为**碰撞的动力学问题**. 但也有人把运动学问题称为**碰撞问题**,而把动力学问题称为**散射问题**. 在这一节中我们只讨论第一个问题,第二个问题留到下节再讨论.

我们先在质心坐标系中来讨论这个问题. 用$\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$和$\boldsymbol{v}'_1$、$\boldsymbol{v}'_2$ 表示质心系中两个粒子碰撞前后的速度. 由(1.12)式得

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{v}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\boldsymbol{v}, \tag{5.1}$$

$$\boldsymbol{v}'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\boldsymbol{v}', \quad \boldsymbol{v}'_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\boldsymbol{v}'. \tag{5.2}$$

式中$\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v}'$为两个粒子在碰撞前和碰撞后的相对速度:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2, \tag{5.3}$$

$$v' = v_1' - v_2'. \tag{5.4}$$

根据§3.1中的讨论,在质心系中两个粒子的运动只能反映其相对运动部分. 单粒子在中心势场中的运动必作平面运动,所以可以在平面上来讨论这个问题. 质心系中动量守恒和能量守恒可表示为:

$$m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2 = m_1 \boldsymbol{v}_1' + m_2 \boldsymbol{v}_2' = 0, \tag{5.5}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2. \tag{5.6}$$

由(5.5)式可知,两个粒子的动量,无论碰撞前后,都是大小相等,方向相反的. 因此

$$\begin{cases} m_1 v_1 = m_2 v_2, \\ m_1 v_1' = m_2 v_2'. \end{cases} \tag{5.7}$$

将(5.7)代入(5.6),可得

$$v_1' = v_1, \qquad v_2' = v_2. \tag{5.8}$$

(5.7)和(5.8)式表明,在质心系中两个粒子的弹性碰撞只改变粒子的运动方向,不改变其速度大小. 如果我们用 $\boldsymbol{e}$ 表示质心系中第一个粒子碰撞后的速度方向,则由(5.2)、(5.8)和(5.1)得

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1' = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} v\boldsymbol{e}, \\ \boldsymbol{v}_2' = -\dfrac{m_1}{m_1 + m_2} v\boldsymbol{e}. \end{cases} \tag{5.9}$$

现在转到实验室坐标系中,相应的速度用 $\boldsymbol{v}_0$ 表示. 利用

$$\boldsymbol{v}_{01}' = \boldsymbol{v}_{0C} + \boldsymbol{v}_1', \qquad \boldsymbol{v}_{02}' = \boldsymbol{v}_{0C} + \boldsymbol{v}_2',$$

可得

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_{01}' = \dfrac{m_1 \boldsymbol{v}_{01} + m_2 \boldsymbol{v}_{02}}{m_1 + m_2} + \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} v\boldsymbol{e}; \\ \boldsymbol{v}_{02}' = \dfrac{m_1 \boldsymbol{v}_{01} + m_2 \boldsymbol{v}_{02}}{m_1 + m_2} - \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} v\boldsymbol{e}. \end{cases} \tag{5.10}$$

其中 $v = |\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2| = |\boldsymbol{v}_{01} - \boldsymbol{v}_{02}|$ 在两种坐标系中是一样的.

(5.9)和(5.10)就是我们所要寻找的关系式. 这些结果和两个粒子的相互作用的具体性质无关. 式中唯一没有确定的是 $\boldsymbol{e}$ 的方向. 要确定 $\boldsymbol{e}$,则要知道粒子间相互作用的性质,这个问题我们将留到下节讨论.

可以借助几何学来解释上面所得到的结果. 为了方便起见,把速度换为动量. 分别用 m_1 和 m_2 乘(5.1)、(5.9)和(5.10)中的第一式和第二式,可得

$$m_1 \boldsymbol{v}_1 = m_r \boldsymbol{v}, \qquad m_2 \boldsymbol{v}_2 = -m_r \boldsymbol{v}, \tag{5.11}$$

$$m_1 \boldsymbol{v}_1' = m_r v\boldsymbol{e}, \qquad m_2 \boldsymbol{v}_2' = -m_r v\boldsymbol{e}; \tag{5.12}$$

和

$$\begin{cases} m_1 \boldsymbol{v}'_{01} = \dfrac{m_1}{m_1+m_2}(m_1 \boldsymbol{v}_{01}+m_2 \boldsymbol{v}_{02}) + m_r v\boldsymbol{e}, \\ m_2 \boldsymbol{v}'_{02} = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}(m_1 \boldsymbol{v}_{01}+m_2 \boldsymbol{v}_{02}) - m_r v\boldsymbol{e}. \end{cases} \tag{5.13}$$

以 O 为圆心作半径为 $m_r v$ 的圆,则(5.11)和(5.12)两式可用图 3.9(a)表示,其中取

$$\overrightarrow{AO} = m_1 \boldsymbol{v}_1, \quad \overrightarrow{BO} = m_2 \boldsymbol{v}_2,$$

$$\overrightarrow{OC} = m_1 \boldsymbol{v}'_1, \quad \overrightarrow{OD} = m_2 \boldsymbol{v}'_2.$$

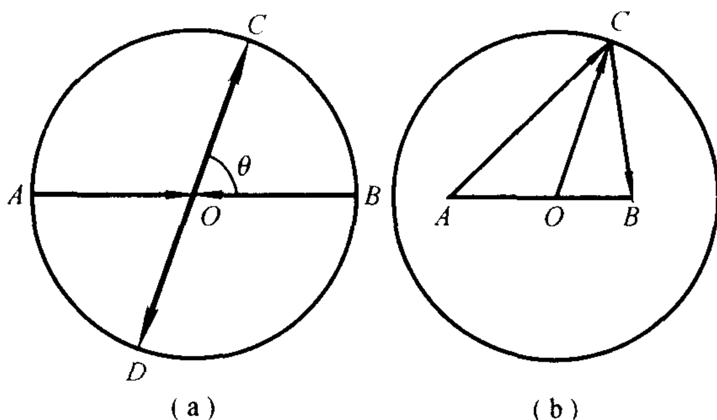


图 3.9

AB 和 CD 是圆的两条直径,AB 位置固定,C 点可在圆周上任意变动,$\overrightarrow{OC}$方向即为 $\boldsymbol{e}$ 方向,可用角度 θ 来表示.

(5.13)式可用图 3.9(b)表示. 这个圆的半径也为 $m_r v$,其中取

$$\overrightarrow{AB} = m_1 \boldsymbol{v}_{01} + m_2 \boldsymbol{v}_{02},$$

$$\overrightarrow{AO} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{OB} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{AB}.$$

于是由(5.13)得

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = \frac{m_1}{m_1+m_2}(m_1 \boldsymbol{v}_{01} + m_2 \boldsymbol{v}_{02}) + m_r v\boldsymbol{e} = m_1 \boldsymbol{v}'_{01},$$

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \frac{m_2}{m_1+m_2}(m_1 \boldsymbol{v}_{01} + m_2 \boldsymbol{v}_{02}) - m_r v\boldsymbol{e} = m_2 \boldsymbol{v}'_{02}.$$

A 点和 B 点的位置是固定的,而 C 点的位置则可在圆周上任意变动.

下面我们比较详细地来研究一下碰撞前的粒子中有一个(假定它是粒子

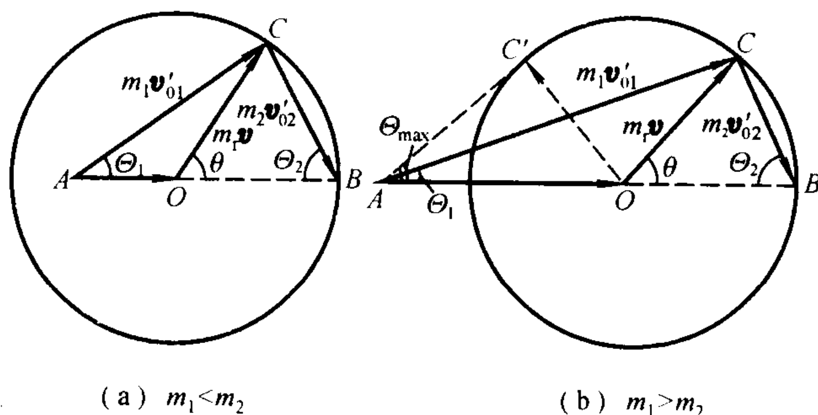
m_2)是处于静止的情况,即靶核静止,这是实际问题中最常碰到的一种情况. 这时图 3.9(b)中 AB 的长度等于 $m_1 v_{01}$,而长度 OB 等于圆的半径,

$$OB = \frac{m_2}{m_1 + m_2} m_1 v_{01} = m_r v_{01} = m_r \left| \boldsymbol{v}_{01} - \boldsymbol{v}_{02} \right| = m_r v,$$

即 B 点在圆周上,而 A 点既可在圆内,也可在圆外. 因为

$$\frac{AO}{OB} = \frac{\dfrac{m_1}{m_1 + m_2} AB}{\dfrac{m_2}{m_1 + m_2} AB} = \frac{m_1}{m_2},$$

所以当 $m_1 < m_2$ 时,$AO < OB$,A 点在圆内;$m_1 > m_2$ 时,$AO > OB$,A 点在圆外. 图 3.10(a)和(b)分别给出了与此相应的图形. 图中角 Θ_1 和 Θ_2 是在碰撞后



(a) $m_1<m_2$　　(b) $m_1>m_2$

图 3.10

粒子相对于撞击方向($m_1\ \boldsymbol{v}_{01}$方向)的偏转角,而$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{OC}$的夹角就是质心系中第一个粒子的偏转角 θ. 这是因为此时 $\boldsymbol{v}_{0C} = \dfrac{m_1 \boldsymbol{v}_{01}}{m_1 + m_2}$,而 $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_{01} - \boldsymbol{v}_{0C} = \dfrac{m_2 \boldsymbol{v}_{01}}{m_1 + m_2}$,即 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_{0C}$方向一致. 根据定义,θ 是 $\boldsymbol{v}'_1$ 相对于 $\boldsymbol{v}_1$ 的偏转角,即 $\boldsymbol{e}$ 和$\boldsymbol{v}_1$ 的夹角. 现在 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_{0C}$ 方向一致,因此表示 $\boldsymbol{e}$ 方向的$\overrightarrow{OC}$和表示 $\boldsymbol{v}_{0C}$ 方向的$\overrightarrow{AB}$之间的夹角就是 θ 角.

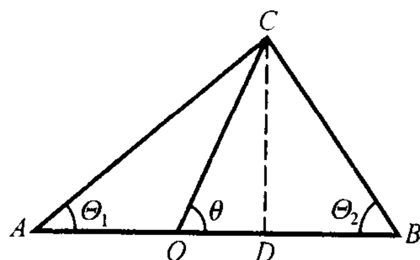


图 3.11

不难找到用 θ 表示Θ_1 和 Θ_2 的关系式. 图 3.10 中的(a)和(b)两种情形,都可用图 3.11 表示. 从图中可以看到

$$\tan \Theta_1 = \frac{CD}{AO + OD} = \frac{OC\sin\theta}{\dfrac{m_1}{m_1 + m_2} AB + OC\cos\theta}.$$

将 $OC=m_r v$，$AB=m_1 v_{01}$代入上式，并考虑到 $v=|\boldsymbol{v}_{01}-\boldsymbol{v}_{02}|=v_{01}$，即得

$$\tan\Theta_1=\frac{m_2\sin\theta}{m_1+m_2\cos\theta}. \tag{5.14}$$

Θ_2 和 θ 的关系可由图 3.11 中 $OB=OC=m_r v$ 直接得到：

$$\Theta_2=\frac{1}{2}(\pi-\theta). \tag{5.15}$$

利用余弦公式，根据图 3.11 中的几何关系，还可以将 v_{01}' 和 v_{02}' 用 v_{01} 和 θ 来表示

$$\begin{cases} v_{01}'=\dfrac{\sqrt{m_1^2+m_2^2+2m_1m_2\cos\theta}}{m_1+m_2}v_{01}, \\ v_{02}'=\dfrac{2m_1v_{01}}{m_1+m_2}\sin\dfrac{\theta}{2}. \end{cases} \tag{5.16}$$

$\Theta_1+\Theta_2$ 是碰撞后两个粒子飞出方向间的夹角．显然，当 $m_1<m_2$ 时，$\Theta_1+\Theta_2>\frac{\pi}{2}$；当 $m_1>m_2$ 时，$\Theta_1+\Theta_2<\frac{\pi}{2}$.

如果碰撞后两个粒子在一条直线上运动(即正面碰撞)，这时 $\theta=\pi$，C 点和 AB 在一直线上．当 $m_1<m_2$ 时，$\overrightarrow{AC}$和$\overrightarrow{CB}$方向相反，所以碰撞后两个粒子的动量方向相反．当 $m_1>m_2$ 时，$\overrightarrow{AC}$和$\overrightarrow{CB}$方向相同，碰撞后两个粒子的动量方向相同，这时由(5.16)式可得

$$\boldsymbol{v}_{01}'=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{v}_{01}, \qquad \boldsymbol{v}_{02}'=\frac{2m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{v}_{01}. \tag{5.17}$$

显然，在这种情况下，v_{02}'的值最大．因此原先静止的粒子由于碰撞而可能得到的最大能量是

$$E_{2\max}'=\frac{1}{2}m_2v_{02\max}'^2=\frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}E_1, \tag{5.18}$$

其中 $E_1=\frac{1}{2}m_1v_{01}^2$是在碰撞前运动着的粒子的能量．

当 $m_1<m_2$ 时，碰撞后粒子的速度可以有任何方向，即图 3.10(a)中的 C 点可处在圆周上的任意位置，Θ_1 可取 $0\sim\pi$ 间的任意值．当 $m_1>m_2$ 时，Θ_1 不能超过某个最大值 $\Theta_{1\max}$，即使 AC 变成和圆相切的 AC'[如图 3.10(b)所示]．很明显 $\sin\Theta_{1\max}=\frac{OC'}{OA}$．又因$\frac{OC'}{OA}=\frac{m_2}{m_1}$，所以得

$$\sin\Theta_{1\max}=\frac{m_2}{m_1}. \tag{5.19}$$

质量相同的两个粒子(其中之一原来静止)的碰撞特别简单. 这时不仅 B 点,而且 A 点也位于圆周上,如图 3.12 所示. 将 $m_1 = m_2$ 代入(5.14)、(5.15)和(5.16)可得

$$\Theta_1 = \frac{\theta}{2}, \qquad \Theta_2 = \frac{1}{2}(\pi - \theta), \tag{5.20}$$

$$v'_{01} = v_{01}\cos\frac{\theta}{2}, \qquad v'_{02} = v_{01}\sin\frac{\theta}{2}. \tag{5.21}$$

由于 $AC \perp CB$,因此碰撞后两粒子飞出的方向互成直角.

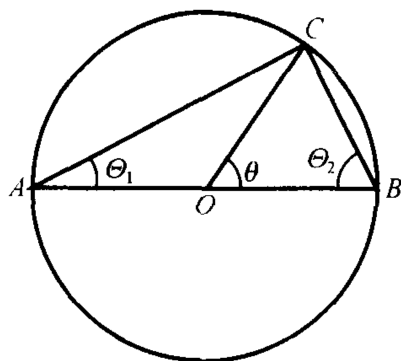


图 3.12

§3.6 散射截面

上节指出,仅仅由动量守恒和能量守恒两个条件,不考虑相互作用势 $V(r)$,还不能确定两个粒子碰撞后偏转的角度 Θ_1 和 Θ_2. 要决定这两个角度,需知道第一个粒子在质心系中的偏转角 θ. 根据 §3.1 和 §3.2 的讨论,这需要解质量为 m_r 的粒子在中心势场 $V(r)$中的轨道方程

$$\varphi = \int \frac{\frac{L}{r^2}\mathrm{d}r}{\sqrt{2m_r(E - V) - \frac{L^2}{r^2}}}. \tag{6.1}$$

上式就是(2.9)式,只不过把那里的 θ 换成了 φ,因为现在我们把 θ 专门用来表示第一个粒子在质心系中的偏转角. 下面我们来讨论如何利用(6.1)式来决定 θ.

如图 3.13 所示,设粒子 2 固定在 O 点不动,粒子 1 从无穷远处向粒子 2 飞来,在中心势 $V(r)$ 的作用下,粒子 1 偏转一个角度 θ 后又向无穷远飞去,根据对称性的考虑,粒子的轨道关于 OA 是对称的. A 是轨道的转折点,$OA = r_{\min}$,φ_0 为矢径 r_∞ 和 $r_{\min}$所夹的角度. 从图中可以看出,偏转角 θ 和 φ_0 的关系为:

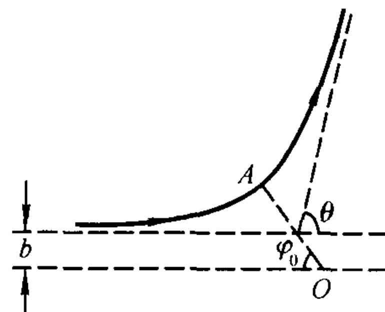


图 3.13

$$\theta = \pi - 2\varphi_0. \tag{6.2}$$

通常称 O 点为**散射中心**,θ 为**散射角**.

在弹性散射问题中,我们采用粒子在无穷远的速度 v_∞ 和**瞄准距离** b 来代

替(6.1)中的两个守恒量 E 和 L,将会带来不少方便. 瞄准距离是从中心 O 到 v_∞所在直线的距离. b、v_∞和 E、L 之间的关系为:

$$E = \frac{1}{2}m_r v_\infty^2, \qquad L = m_r b v_\infty. \tag{6.3}$$

将(6.3)代入(6.1),并对 r 从 $r_{\min}$积到∞,得

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{b\,\dfrac{dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{b^2}{r^2} - \dfrac{2V(r)}{m_r v_\infty^2}}}, \tag{6.4}$$

式中 $r_{\min}$的值由(2.5)式中取 $\dot{r}=0$ 所得的方程

$$E = \frac{L^2}{2m_r r^2} + V(r) \tag{6.5}$$

决定. (6.2)、(6.4)和(6.5)就是由相互作用 $V(r)$及初始条件 b、v_∞决定散射角 θ 的基本公式.

在实际的物理问题中所碰到的一般不是一个粒子的散射,而是射向散射中心的具有相同速度的全同粒子所组成的整个粒子束的散射,如图 3.14 所示. 粒子束内不同的粒子有着不同的瞄准距离 b. 由(6.4)式可知,不同的 b 将有不同的 φ_0,从而就有不同的散射角 θ. 我们用 dN 表示单位时间内散射到θ 和 $\theta+d\theta$ 角度内的粒子数. dN 本身不便于描述散射过程的特征,因为它是和入射粒子束的密度成正比的. 因此我们定义一个新的物理量

$$d\sigma = \frac{dN}{n}, \tag{6.6}$$

其中 n 是单位时间内通过垂直于粒子束前进方向的单位截面积的粒子数. 通常假定粒子束在整个截面上是均匀的,即 n 是常数. 不难看出,(6.6)式所定义的 $d\sigma$ 具有面积的量纲,因此称 $d\sigma$ 为**微分散射截面**. 因为 dN 所表示的是单位时间内散射到θ 到$\theta+d\theta$ 范围内的粒子数,因此 $d\sigma$ 必和θ 有关,并且应和 $d\theta$ 成正比,所以 $d\sigma$ 也可表示为:

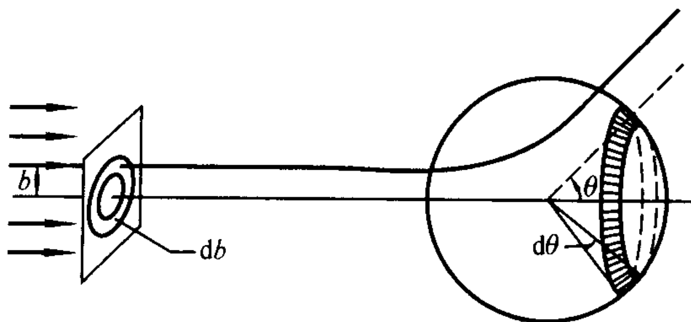


图 3.14

$$d\sigma = f(\theta)d\theta. \tag{6.7}$$

$f(\theta)$表示粒子束经过散射后的分布函数. 下面我们来寻找函数 $f(\theta)$的表达式.

从图 3.14 中可以看出,散射角随瞄准距离 b 单调下降,散射到 θ 到$\theta+d\theta$角度范围内的粒子,是瞄准距离在区间 $b(\theta)$和 $b(\theta)+db(\theta)$内的粒子. 这种粒子的数目等于 n 与半径为b 和$b+db$ 的圆环面积的乘积,即

$$dN = 2\pi nbdb,$$

将它代入(6.6)得

$$d\sigma = 2\pi bdb. \tag{6.8}$$

(6.8)式表示微分散射截面和瞄准距离的关系. 为了找到微分散射截面对于散射角的依赖关系,只要把(6.8)式改写为

$$d\sigma = 2\pi b(\theta)\left|\frac{db(\theta)}{d\theta}\right|d\theta \tag{6.9}$$

即可,其中 $b(\theta)$可由(6.2)和(6.4)式决定. 因为 $d\sigma$ 应该是一个正的量,$b(\theta)$也是一个正的量,而$\frac{db}{d\theta}$则可能是负的,因此我们在(6.8)式中用绝对值来表示$\frac{db}{d\theta}$.

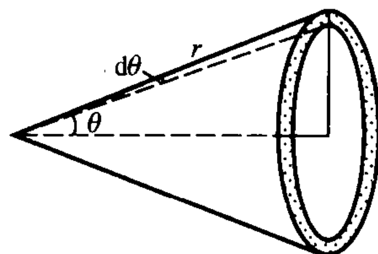


图 3.15

实际应用时对(6.9)式还要作一点变换. 通常都是使 $d\sigma$ 属于立体角 $d\omega$ 而不属于平面角 $d\theta$. 比较图 3.14 和图 3.15,由于两个图中的 θ 是相同的,故得

$$d\omega = \frac{dS}{r^2} = 2\pi\sin\theta d\theta. \tag{6.10}$$

将(6.10)代入(6.9)得

$$d\sigma = \frac{b(\theta)}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right|d\omega, \tag{6.11}$$

再代入(6.6)式得

$$dN = n\frac{b(\theta)}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right|d\omega. \tag{6.12}$$

我们可用计数器在以散射中心 O 为球心的球面上测量散射粒子数 dN,$d\omega$是计数器对散射中心所张的立体角,n 也是可以测量的. 把 dN、n 和 $d\omega$ 的测量值代入(6.12)后,即可以在实验上测量$\frac{b(\theta)}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right|$. 而理论上由(6.2)和(6.4)两式,在已知 $V(r)$和 v_∞的情况下可以计算出 $b(\theta)$,这样理论和实验就可以进行比较了. 如果粒子间的相互作用 $V(r)$未知,则由实验结果可推算 $V(r)$应是怎样的函数.

以上讨论的是在粒子 m_2 不动的情况下所导出的公式,回到一般情况下的实际问题时:粒子 m_2 最初静止,粒子 m_1 受到粒子 m_2 的散射,散射过程中粒子 m_2 也要运动. 根据§3.1 的讨论,可以认为(6.9)或(6.11)决定了质心系中的微分散射截面对散射角的依赖关系. 为了找到实验室系中微分散射截面对散射角 Θ_1 和 Θ_2 的依赖关系,应该按照(5.14)和(5.15)式将这里的 θ 换为 Θ_1 和 Θ_2. 将 θ 换为 Θ_1 时可得到入射粒子束的散射截面的表示式,将 θ 换为 Θ_2 时得到最初静止粒子的散射截面的表示式.

*§3.7　刚球势散射　散射截面从质心系到实验室系的变换

我们举两个具体的求散射截面的例子. 一个是卢瑟福散射,即 $V(r)=\frac{\alpha}{r}$ 的散射,将放在下节讨论. 另一个例子是刚球模型,即两粒子间的相互作用为

$$V(r)=\begin{cases}\infty & r<R,\\ 0 & r\geqslant R,\end{cases} \tag{7.1}$$

R 为刚球半径.

先讨论在质心系中的微分散射截面. 如图 3.16 所示,粒子不可能进入(7.1)的刚球势场内部. 粒子在球外则是自由的(作等速直线运动). 因此,粒子的轨道由两条对 OA 对称的直线组成,A 点为轨道与刚球的交点.

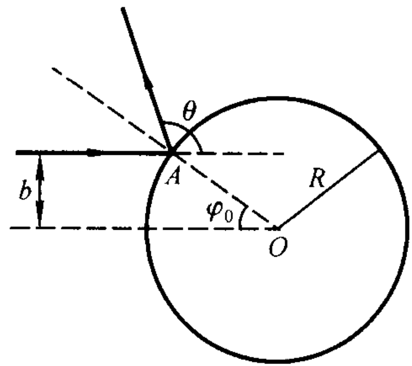


图 3.16

由图可知

$$b = R\sin\varphi_0 = R\sin\frac{\pi-\theta}{2} = R\cos\frac{\theta}{2}. \tag{7.2}$$

把它代入(6.9)和(6.11)即得质心系中刚球势的微分散射截面:

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\pi R^2}{2}\sin\theta\mathrm{d}\theta, \tag{7.3}$$

或

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{R^2}{4}\mathrm{d}\omega. \tag{7.4}$$

现在转到实验室系中来讨论,这只要对(7.2)式按(5.14)和(5.15)式进行相应的变换即可. (7.3)式可改写为

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\pi R^2}{2}|\mathrm{d}(\cos\theta)|. \tag{7.5}$$

将(5.14)对 $\cos\theta$ 求解,经过简单的变换可得

$$\cos\theta = -\frac{m_1}{m_2}\sin^2\Theta_1 \pm \cos\Theta_1\sqrt{1-\frac{m_1^2}{m_2^2}\sin^2\Theta_1}. \tag{7.6}$$

将(7.6)代入(7.5)即可将散射截面从质心坐标系变换到实验室坐标系. 在代入以前,我们先对(7.6)式作一些讨论. (7.6)式表明每一个 Θ_1 对应两个 θ 值. 从图 3.10 可看出,这是对应于 $m_1>m_2$ 的情况,两个 θ 值对应于AC 和圆周的两个交点. 对于 $m_2>m_1$ 的情况,图 3.10(a)表明 Θ_1 和 θ 的对应关系是单值的. 因此,在后一种情况下(7.6)只能取正号,它符合 $\Theta_1=0$ 时,$\theta=0$ 的条件. 如果取负号,则 $\Theta_1=0$ 时,$\theta=\pi$ 和图中情况不符.

再将(7.6)代入(7.5),对于 $m_2>m_1$ 的情况,(7.6)式取正号,代入(7.5)后得

$$d\Sigma_1 = \frac{R^2}{4}\left[2\frac{m_1}{m_2}\cos\Theta_1 + \frac{1+\frac{m_1^2}{m_2^2}\cos 2\Theta_1}{\sqrt{1-\frac{m_1^2}{m_2^2}\sin^2\Theta_1}}\right]d\Omega_1 \quad (m_2>m_1), \tag{7.7}$$

其中 $d\Omega_1=2\pi\sin\Theta_1 d\Theta_1$. 当 $m_1>m_2$ 时,应考虑到 θ 和 Θ_1 的两个可能关系. 我们用 $\cos\theta_+$ 和 $\cos\theta_-$ 分别表示(7.6)中取正号和负号的值. 如果 θ 的两个值均随Θ_1 的增加而增加,则用到(7.6)式时应取 $\cos\theta_+$ 与 $\cos\theta_-$ 之和. 但从图 3.10(b)中可看出,当 Θ_1 增加时,θ 的两个值,一个增加,另一个减少. 因此我们应取两者之差. 根据这些考虑,最后得

$$\begin{aligned} d\Sigma_1 &= -\frac{\pi R^2}{2}[d(\cos\theta_+) - d(\cos\theta_-)] \\ &= \frac{R^2}{2}\frac{1+\frac{m_1^2}{m_2^2}\cos 2\Theta_1}{\sqrt{1-\frac{m_1^2}{m_2^2}\sin^2\Theta_1}}d\Omega_1 \quad (m_1>m_2). \end{aligned} \tag{7.8}$$

当 $m_1=m_2$ 时,无论由(7.7)或(7.8)均可得

$$d\Sigma_1 = R^2|\cos\Theta_1|d\Omega_1 \quad (m_1=m_2). \tag{7.9}$$

这个结论亦可直接根据(5.20)式将 $\theta=2\Theta_1$ 代入(7.5)式得到. 这也间接证明了我们在导出上述公式时所作的一些分析是正确的.

对于最初静止的小球,由(5.15)式,我们总有

$$\theta = \pi - 2\Theta_2.$$

将它代入(7.5)即得

$$d\Sigma_2 = R^2|\cos\Theta_2|d\Omega_2. \tag{7.10}$$

将微分散射截面对所有散射角积分得到总散射截面. 在总散射截面中已不再含有角度坐标,因此不论在质心系中还是在实验室系中,数值都一样. 下面我们来求刚球势的总散射截面,并验证质心系的总散射截面和实验室系的总散射截面是一样的.

先求质心系中的总散射截面. 由(7.3)式:

$$\sigma = \int_0^\pi \mathrm{d}\sigma = \frac{\pi R^2}{2}\int_0^\pi \sin\theta \mathrm{d}\theta = \pi R^2. \tag{7.11}$$

上式表明刚球势的总散射截面和刚球的截面积相等.

再求实验室系中的总散射截面. 可以证明无论对第一个粒子还是第二个粒子,总散射截面都一样. 先考虑第二个粒子的总散射截面,由(7.10)得

$$\Sigma_2 = \int \mathrm{d}\Sigma_2 = 2\pi R^2 \int |\cos\Theta_2| \sin\Theta_2 \mathrm{d}\Theta_2,$$

式中由于微分散射截面恒正,故要求对 $\cos\Theta_2$ 取绝对值. 因 $\cos\Theta_2$ 在$\frac{\pi}{2}\sim\pi$ 区间内是负的,因此只要在 $0\sim\frac{\pi}{2}$范围内积分即可. 这一点也可从图 3.10 中看出,无论是 $m_1<m_2$ 还是 $m_1>m_2$ 的情况,当 θ 从 $\theta\sim\pi$ 变化时,Θ_2 的变化范围只能是 $0\sim\frac{\pi}{2}$. 所以

$$\Sigma_2 = 2\pi R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\Theta_2 \sin\Theta_2 \mathrm{d}\Theta_2 = \pi R^2,$$

和质心系的总散射面相同.

再看实验室系中第一个粒子的总散射截面. 这要分 $m_1>m_2$ 和 $m_1<m_2$ 两种情况. 我们考虑 $m_1>m_2$ 的情况. 由(7.8)式得

$$\Sigma_1 = \int \mathrm{d}\Sigma_1 = \frac{R^2}{2}\int \frac{1+\frac{m_1^2}{m_2^2}\cos 2\Theta_1}{\sqrt{1-\frac{m_1^2}{m_2^2}\sin^2\Theta_1}} 2\pi \sin\Theta_1 \mathrm{d}\Theta_1.$$

由图 3.10(b)可知,Θ_1 的变化范围为 $0\sim\Theta_{1\max}$. 由(5.19)式,$\sin\Theta_{1\max}=m_2/m_1$. 考虑了这两点后,我们得(为简化,令符号 $\Theta_{1\max}=\beta$):

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \pi R^2 \int_0^\beta \frac{1+\frac{\cos 2\Theta_1}{\sin^2\beta}}{\sqrt{1-\frac{\sin^2\Theta_1}{\sin^2\beta}}} \sin\Theta_1 \mathrm{d}\Theta_1 \\ &= -\frac{\pi R^2}{\sin\beta}\int_0^\beta \frac{2\cos^2\Theta_1 - \cos^2\beta}{\sqrt{\cos^2\Theta_1-\cos^2\beta}} \mathrm{d}(\cos\Theta_1).\end{aligned}$$

作变换 $\cos\Theta_1 = x$，则

$$\Sigma_1 = \frac{\pi R^2}{\sin\beta}\int_{\cos\beta}^{1}\frac{2x^2-\cos^2\beta}{\sqrt{x^2-\cos^2\beta}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi R^2}{\sin\beta}x\sqrt{x^2-\cos^2\beta}\Big|_{\cos\beta}^{1} = \pi R^2.$$

它和第二个粒子的总散射截面确是一样的.

总散射截面还有另一种表示方法，由(6.8)式可得

$$\sigma = \int\mathrm{d}\sigma = 2\pi\int_0^{b_{\max}} b\,\mathrm{d}b = \pi b_{\max}^2. \tag{7.12}$$

式中 $b_{\max}$是最大瞄准距离，即 $b<b_{\max}$时粒子都被散射，而 $b>b_{\max}$时粒子不受影响. 如果我们能找到 $b_{\max}$，利用(7.12)式求总散射截面将是极方便的. 对于刚球势，$b_{\max}$即为刚球半径 R，所以由(7.12)式得 $\sigma=\pi R^2$，和前面直接积分的结果一致，这是显然的.

**§3.8 库仑势场中的弹性散射

本节讨论带电粒子在库仑场中的弹性散射截面. 在(6.4)和(6.5)中令 $V=\frac{\alpha}{r}$，得

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty}\frac{b\dfrac{\mathrm{d}r}{r^2}}{\sqrt{1-\dfrac{b^2}{r^2}-\dfrac{2}{m_r v_\infty^2}\dfrac{\alpha}{r}}},$$

式中

$$r_{\min} = \frac{\alpha}{m_r v_\infty^2}\left[1+\sqrt{1+\left(\frac{b m_r v_\infty^2}{\alpha}\right)^2}\right].$$

积分后得

$$\varphi_0 = \arccos\frac{\dfrac{\alpha}{m_r v_\infty^2 b}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\alpha}{m_r v_\infty^2 b}\right)^2}}. \tag{8.1}$$

由上式得

$$b^2 = \frac{\alpha^2}{m_r^2 v_\infty^4}\tan^2\varphi_0 = \frac{\alpha^2}{m_r^2 v_\infty^4}\cot^2\frac{\theta}{2}. \tag{8.2}$$

(8.2)式对 θ 微商得

$$\left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta}\right| = \frac{\alpha}{2m_r v_\infty^2}\frac{1}{\sin^2\dfrac{\theta}{2}}. \tag{8.3}$$

将(8.3)式代入(6.9)或(6.11)得

$$d\sigma = \pi\left(\frac{\alpha}{m_r v_\infty^2}\right)^2 \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^3\frac{\theta}{2}} d\theta, \tag{8.4}$$

或

$$d\theta = \left(\frac{\alpha}{2m_r v_\infty^2}\right)^2 \frac{d\omega}{\sin^4\frac{\theta}{2}}. \tag{8.5}$$

这个公式称为**卢瑟福**(Rutherford)**公式**. 从式中可以看出,有效截面不依赖于 α 的符号,因此所得结果对于斥力和引力的库仑场都一样.

下面我们把(8.4)和(8.5)变换到实验室系中来. 对于原先静止的粒子,按照(5.15)式将 $\theta=\pi-2\Theta_2$ 代入(8.4)式得

$$\begin{aligned} d\Sigma_2 &= 2\pi\left(\frac{\alpha}{m_r v_\infty^2}\right)^2 \frac{\sin\Theta_2}{\cos^3\Theta_2} d\Theta_2 \\ &= \left(\frac{\alpha}{m_r v_\infty^2}\right)^2 \frac{d\Omega_2}{\cos^3\Theta_2}. \end{aligned} \tag{8.6}$$

对于入射粒子来说,按照(5.14)式进行变换时,所导出的公式是非常复杂的,我们只讨论两个特殊情况:

(1) $m_2 \gg m_1$,例如 α 粒子被重元素的核所散射. 这时由(5.14)式可得 $\theta\approx\Theta_1$,并且折合质量 $m_r\approx m_1$,代入(8.5)即得

$$d\Sigma_1 = \left(\frac{\alpha}{4E_1}\right)^2 \frac{d\Omega_1}{\sin^4(\Theta_1/2)}, \tag{8.7}$$

式中 $E_1=\frac{1}{2}m_r v_\infty^2$ 是入射粒子的能量.

(2) $m_1=m_2=m$,即散射和被散射的粒子质量相等. 这时折合质量 $m_r=m/2$,并且由(5.20)得 $\theta=2\Theta_1$,代入(8.4),即得

$$\begin{aligned} d\Sigma_1 &= 2\pi\left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2 \frac{\cos\Theta_1}{\sin^3\Theta_1} d\Theta_1 \\ &= \left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2 \frac{\cos\Theta_1}{\sin^4\Theta_1} d\Omega_1. \end{aligned} \tag{8.8}$$

如果两种粒子不仅质量相等,而且这些粒子完全相向,那就不必区别原来运动着的粒子和原来静止的粒子. 因此需要把 $d\Sigma_1$ 和 $d\Sigma_2$ 相加,再把 Θ_1 和 Θ_2 换成共同的值 Θ,就得到所有粒子的共同有效散射截面

$$d\Sigma = d\Sigma_1 + d\Sigma_2 = \left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2 \left(\frac{1}{\sin^4\Theta} + \frac{1}{\cos^4\Theta}\right)\cos\Theta d\Omega. \tag{8.9}$$

* * §3.9 粒子的分裂

本节讨论一个粒子在没有外力的作用下,自动分裂为两个粒子的问题. 基本粒子的两体

衰变,放射性元素的α衰变、β衰变都属于这种情况.宏观物体因“爆炸”而一分为二也属于这种情况.

我们先在质心系中讨论这个问题.在分裂以前粒子的动量和动能都等于零,粒子的能量就是它的内能 U,由动量守恒定律,分裂后两个粒子的动量之和仍然为零:

$$\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = 0, \tag{9.1}$$

即 $p_1 = p_2 = p$.分裂后体系的能量等于两个粒子各自的内能和动能之和,由能量守恒定律得

$$U = U_1 + \frac{p^2}{2m_1} + U_2 + \frac{p^2}{2m_2}, \tag{9.2}$$

其中 m_1 和 m_2 是分裂后两个粒子的质量.分裂前后体系内能之差称为**分裂能** ε,

$$\varepsilon = U - (U_1 + U_2). \tag{9.3}$$

显然,分裂能 ε 必须大于零.将(9.2)代入(9.3)得

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \frac{p^2}{2m_r}, \tag{9.4}$$

式中 m_r 为分裂后两个粒子的折合质量.两个粒子的速度分别为

$$v_1 = \frac{p}{m_1}, \qquad v_2 = \frac{p}{m_2}. \tag{9.5}$$

对于一种确定的分裂方式,ε 是常数,从而 p 和 v_1、v_2 也都是常数.

现在转到实验室系统中来讨论这个问题.粒子在实验室系中的速度 $\boldsymbol{v}_0$ 和质心系中的速度 $\boldsymbol{v}$ 之间的关系为

$$\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}_{0C} + \boldsymbol{v},$$

其中的质心速度 $\boldsymbol{v}_{0C}$ 就是粒子分裂前的速度.由上式可得

$$v_0^2 = v^2 + v_{0C}^2 - 2vv_{0C}\cos\Theta, \tag{9.6}$$

式中 Θ 是粒子相对于质心速度 v_{0C} 方向的飞出角.飞出粒子在质心系中的速度 v 可由(9.4)和(9.5)两式决定.因此由(9.6)式可决定飞出粒子在实验室系中的速度 v_0 和飞出角 Θ 之间的关系.此关系可借助图3.17来表示,速度 $\boldsymbol{v}_0$ 可由距离圆心为 v_{0C} 的 A 点指向以 v 为半径的圆周上的 C 点的矢量 $\overrightarrow{AC}$ 来表示.图中的(a)和(b)分别对应 $v_{0C} < v$ 和 $v_{0C} > v$ 的两种情况.在情况(a)中,粒子可以以任意角 Θ 飞出.但在情况(b)中,粒子只能以不超过 Θ_{max} 的角 Θ 飞出.由图可知 Θ_{max} 由圆的切线 AC' 决定,其值为

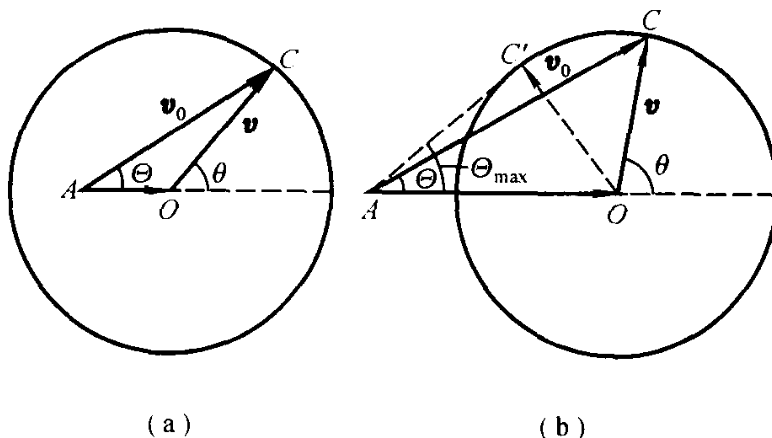


图 3.17

$$\sin \Theta_{\max} = \frac{v}{v_{0C}}. \tag{9.7}$$

在实际的物理问题中,遇到的不是一个而是很多个相同粒子分裂的情况. 因此就产生了新生粒子按方向、能量等分布的问题. 下面我们来讨论这个问题,并假定所有原来的粒子在空间的运动方向是杂乱的,即平均说来是各相同性的.

在质心系中看,所有分裂粒子有相同的能量,而且飞出方向是各向同性的. 这意味着沿着立体角元 $d\omega$ 飞出的粒子数在总数中所占的比重与 $d\omega$ 的大小成正比,即等于$\frac{d\omega}{4\pi}$. 把 $d\omega = 2\pi\sin\theta d\theta$ 代入后,我们得到飞出的粒子数按 θ 角的分布情况为:

$$f(\theta)d\theta = \frac{d\omega}{4\pi} = \frac{1}{2}\sin\theta d\theta = \frac{1}{2}d(\cos\theta). \tag{9.8}$$

我们再来确定粒子数按动能分布的情况. 根据 $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}_{0C} + \boldsymbol{v}$ 可得

$$v_0^2 = v_{0C}^2 + 2v_{0C}v\cos\theta + v^2.$$

因 v 和 v_{0C} 都是常数,所以对上式微分可得

$$d(\cos\theta) = \frac{d(v_0^2)}{2v_{0C}v}.$$

代入(9.8)式可得

$$F(T)dT = \frac{1}{2}\frac{d(v_0^2)}{2v_{0C}v} = \frac{dT}{2mv_{0C}v}, \tag{9.9}$$

其中 $T = \frac{1}{2}mv_0^2$ 为新生粒子的动能. m 是 m_1 还是 m_2 视所研究的新生粒子的种类而定. (9.9)式表明:因为 m、v_{0C}、v 都是常数,故新生粒子按动能 T 的分布是均匀的,动能的最小值为 $T_{\min} = m(v - v_{0C})^2/2$,最大值为 $T_{\max} = m(v + v_{0C})^2/2$. 在此范围内粒子按(9.9)式均匀分布.

再考虑新生粒子按实验室系飞出的角 Θ 的分布. 由图 3.17 不难找到角 Θ 和 θ 的关系为

$$\tan\Theta = \frac{v_0\sin\theta}{v_{0C} + v\cos\theta}. \tag{9.10}$$

解上式得

$$\cos\theta = -\frac{v_{0C}}{v}\sin^2\Theta \pm \cos\Theta\sqrt{1 - \frac{v_{0C}^2}{v^2}\sin^2\Theta}. \tag{9.11}$$

将上式和(7.6)比较,如果令 $v_{0C}/v = m_1/m_2$,则两式完全一样,再比较(9.8)和(7.5)两式,除了相差常数因子 πR^2 外,也完全一样. 因此在那里所讨论的一些结果[(7.7)和(7.8)式]可套过来应用. 其结果是 $v_{0C} < v$ 时,

$$f(\Theta)d\Theta = \frac{\sin\Theta}{2}d\Theta\left[2\frac{v_{0C}}{v}\cos\Theta + \frac{1 + \frac{v_{0C}^2}{v^2}\cos 2\Theta}{\sqrt{1 - \frac{v_{0C}^2}{v^2}\sin^2\Theta}}\right]$$

$$(0 \leqslant \Theta \leqslant \pi); \tag{9.12}$$

$v_{0C} > v$ 时,

$$f(\Theta)\mathrm{d}\Theta=\sin\Theta\mathrm{d}\Theta\frac{1+\frac{v_{0C}^2}{v^2}\cos 2\Theta}{\sqrt{1-\frac{v_{0C}^2}{v^2}\sin^2\Theta}}\quad(0\leqslant\Theta\leqslant\Theta_{\max}).\tag{9.13}$$

最后我们讨论实验室系中两个新生粒子飞出角 Θ_1 和 Θ_2 之间的角关联. 在质心系中两个粒子的飞出角 θ_1 和 θ_2 之间的关系为

$$\theta_1=\pi-\theta_2.\tag{9.14}$$

由(9.10)式,或直接由图 3.17 可得

$$v_{0C}+v_1\cos\theta_1=v_1\sin\theta_1\cot\Theta_1,\tag{9.15}$$

$$v_{0C}+v_2\cos\theta_2=v_2\sin\theta_2\cot\Theta_2.\tag{9.16}$$

利用(9.14),可将(9.16)中的 θ_2 化为 θ_1,得

$$v_{0C}-v_2\cos\theta_1=v_2\sin\theta_1\cot\Theta_2.\tag{9.17}$$

从(9.15)和(9.17)中消去 θ_1 即可得 Θ_1 和 Θ_2 的关联函数. 为此可先从(9.15)和(9.17)中对 $\cos\theta_1$ 和 $\sin\theta_1$ 求解,得

$$\sin\theta_1=\frac{v_{0C}(v_1+v_2)}{v_1v_2(\cot\Theta_1+\cot\Theta_2)},$$

$$\cos\theta_1=\frac{v_{0C}(v_1+v_2)\cot\Theta_1}{v_1v_2(\cot\Theta_1+\cot\Theta_2)}-\frac{v_{0C}}{v_1}.$$

然后令 $\sin^2\theta_1+\cos^2\theta_1=1$,即可将 θ_1 消去. 考虑到 $\frac{v_1}{v_2}=\frac{m_2}{m_1}$,并运用公式(9.4),最后得

$$\frac{m_2}{m_1}\sin^2\Theta_2+\frac{m_1}{m_2}\sin^2\Theta_1-2\sin\Theta_1\sin\Theta_2\cos(\Theta_1+\Theta_2)$$
$$=\frac{2\epsilon}{(m_1+m_2)v_{0C}^2}\sin^2(\Theta_1+\Theta_2).\tag{9.18}$$

习　　题

3.1　求质点在中心势场 $V=-\frac{\alpha}{r^2}(\alpha>0)$中运动的微分方程的解.

3.2　质量相同的两个质点,用一固有长度为 l,劲度系数为 k、质量可不计的弹性棒连接起来,用手握住其中的一个质点,使另一个作水平圆周运动,其速度为 v_0,然后将手放开,讨论这两个质点以后的运动情况.

3.3　质点在一维中心引力 $F(x)=-a/x$ 的作用下,从速度为零,$x=-a$ 处开始运动,试求该质点到达力心 O 的时间.

3.4　定性地讨论粒子在中心势场

$$V=-k\frac{\mathrm{e}^{-\alpha r}}{r}$$

中的运动,式中 k 和 α 为常数.

3.5　将具有 2 个变量 θ、φ 的球摆的运动问题约化为单个变量 θ 的运动方程,然后把球摆的解表示为椭圆积分的形式.

3.6 求粒子在中心力

$$F = -\frac{k}{r^2} + \frac{c}{r^3}$$

的作用下的轨道方程.

3.7 求粒子在3.6题的势场中能作圆周运动的轨道半径,并讨论在此轨道上粒子受到微小扰动后的运动情况.

3.8 试求粒子在势场 $V = -\frac{\alpha}{r}(\alpha > 0)$ 中运动且能量 $E = 0$(抛物线轨道)时,坐标对时间的依赖关系.

***3.9** 当给势能 $V = -\frac{\alpha}{r}$ 以小的增量 $\delta V(r)$ 时,原来的椭圆轨道就不再闭合了,每转一周,轨道的近日点都移动一个小的角度 $\delta\theta$. 求在(1) $\delta V = \beta/r^2$; (2) $\delta V = \gamma/r^3$ 两种情况下的 $\delta\theta$.

3.10 求中心势场 $V = ar^n$ 中的粒子存在圆形稳定轨道的条件.

3.11 证明在椭圆轨道的情况下,动能对时间的平均值等于势能对时间的平均值的一半(位力定理).

3.12 设有一卫星在地球赤道附近很扁的椭圆轨道上运动. 讨论由于大气层的微小的阻力,对卫星轨道的偏心率、周期和近地点的影响.

***3.13** 运动粒子 m_1 和静止粒子 m_2 碰撞后,试在实验室系中用粒子的偏转角来表示粒子碰撞后的速度,即用 Θ_1 和 Θ_2 来表示 v'_{01} 和 v'_{02}.

***3.14** 证明在弹性碰撞中入射粒子损失的能量按散射角的分布规律为 $\varepsilon = \frac{2m_r^2}{m_2}v_\infty^2 \times \sin^2\frac{\theta}{2}$,进而证明在库仑散射中能量损失比较大的粒子比较少,其概率和 $\frac{1}{\varepsilon^2}$ 成正比.

***3.15** 一个带电荷 $+q_1$ 的宇宙线粒子A,以极高的速度 v_0 沿直线运动,距这直线为 s 的地方有一质量为 m、带电 $+q_2$ 的质点B. 当A从B近旁飞过时,可近似认为A的轨道没有改变,仍为直线,但把一部分能量传给了B. 试计算之.

***3.16** 初速为 v_∞ 的粒子受到势场 $V = -\frac{\alpha}{r^2}$ 的散射,问在什么条件下粒子会被力心所俘获,并求俘获的总散射截面.

***3.17** 求粒子在势场 $V = \frac{\alpha}{r^2}(\alpha > 0)$ 中的散射截面.

***3.18** 求粒子在势场

$$V = \begin{cases} 0 & (r > a), \\ V_0 & (r \leqslant a) \end{cases}$$

中的散射截面.

(提示:先证明粒子通过两个等势区域 V_1 和 V_2 的分界面时,粒子的运动方向要发生折射,折射满足关系式:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \sqrt{1 + \frac{2}{mv_1^2}(V_1 - V_2)},$$

式中 α 和 β 为界面法线和粒子通过界面前后的速度 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 的夹角).

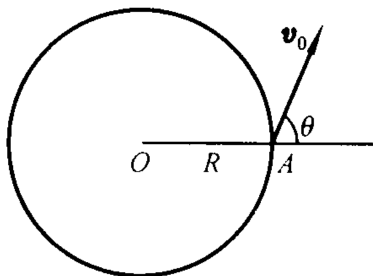
3.19 在粒子的两体衰变中,求实验室系中两个新生粒子飞出方向夹角的可能取值范围.

3.20 证明在中心势场 $V=\frac{\alpha}{r}$ 中运动的粒子,其龙格－楞次(Runge－Lenz)矢量 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{L}+\alpha\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ 是守恒量,并讨论 $\boldsymbol{B}$ 的物理意义. 式中 $\boldsymbol{v}$ 是粒子的速度,$\boldsymbol{L}$ 是粒子的角动量.

***3.21** 中心势场 $V=-\alpha/r^2(\alpha>0)$ 中,粒子能量 $E>0$,(1) 试求粒子的运动规律;(2) 证明存在一个临界角动量 L_c,当 $L<L_c$ 时粒子将被力心俘获.

3.22 设一质量为 m 的质点在 $F(r)=-\alpha/r$ 的中心力场中运动,试求其在稳定平衡位置 r_0 附近作径向小振动的频率.

3.23 在地球表面 A 处以发射角 $\theta=60°$ 和初速 $v_0=\sqrt{gR}$ 发射一颗卫星,其中 R 为地球半径(自转可略). (1) 试求发射瞬间卫星轨道的曲率半径 ρ 和切向加速度 a_t;(2) 试求卫星离开地面的最大高度 h 及在此点的速率 v_1;(3) 如果卫星在此最大高度突然分裂成相等的两半,其一半瞬时静止,试问另一半的轨道形状.



题 3.23 图

***3.24** 一质量为 m 的质点,在对数型中心势场

$$V=\alpha\ln(r/\rho)$$

中运动,试由位力定理求其动能的时间平均值.

***3.25** 求初速为 v_∞ 的粒子在势场 $V=\alpha/r^3(\alpha>0)$ 中的散射截面.

***3.26** 双星与暗物质. 所谓双星就是两近邻星体(其星体线度远小于两星体间的距离)在其共同引力作用下的运动. 例如,太阳系几乎就是一个双星系,它由太阳和木星组成. 假设质量分别为 m 和 m',相距为 ρ 的双星均绕其共同的质心作圆周运动. (1) 试计算该双星系统的运动周期 T_{th};(2) 经过用天文望远镜的长期观测,发现运动周期

$$T_{exp}=\sqrt{\alpha}T_{th}(0<\alpha<1),$$

小于计算值. 暗物质理论认为宇宙中可能存在一种用望远镜观测不到的暗物质. 作为一种简化模型,假定暗物质弥漫在星体周围. 试在此模型下用上述观测结果计算这种暗物质的质量.

***3.27** 黑洞. 所谓黑洞就是一种密度极高的天体,其引力强到使得光子都逃脱不出该洞. 根据实验观测:距离银河系中心约 6×10^9 km 的黑体正在以 $v=2\,000$ km/s 的速度围绕银河系中心旋转,假定银河系中心存在黑洞,试在非相对论经典力学框架下估算黑洞的最大半径.

第四章 刚　　体

本章讨论刚体运动的一般理论．首先讨论刚体运动学，给出刚体定点转动的欧拉描述．动力学部分主要讲定点转动，讨论处理欧拉陀螺和拉格朗日陀螺的一般方法，并对刚体转动的稳定性问题和回转仪的近似理论作了简单讨论．刚体平面运动在普通物理力学中已经讲过，这里只举几个例题，用来澄清普通物理力学中不易深入理解的一些观念．刚体定轴转动只讨论转轴和主轴不一致时的情况．

本章将根据问题的性质，分别采用拉格朗日方程和牛顿力学方程进行讨论．

§4.1 刚体运动的自由度和广义坐标

刚体可以看成是由很多质点组成的质点系，其中任意两个质点之间的相对位置永远不变．只要任意三个不在一条直线上的质点的位置确定了，刚体的位置也就确定了．确定 3 个质点在空间的位置需要 9 个坐标．但根据刚体的性质，每两个质点间的距离保持不变，这样的约束条件共有 3 个，因此 9 个坐标中独立的只有 6 个，所以刚体的自由度是 6．

在描述刚体运动的时候，通常采用两种坐标系：固定在空间的坐标系 $Ox_0y_0z_0$ 和固定在刚体上并随刚体一起运动的坐标系 $Cxyz$．取 $t=0$ 时两个坐标系的坐标轴互相重合，这样，刚体的运动就可采用坐标 $Cxyz$ 相对于 $Ox_0y_0z_0$ 的运动来表示．

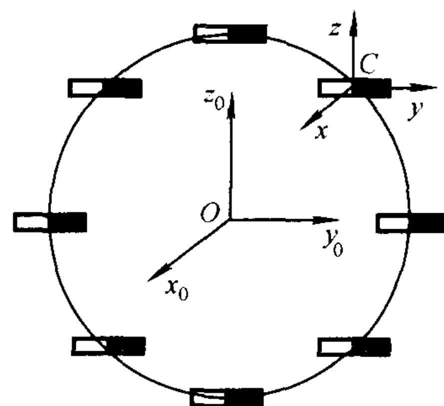
刚体的运动可分为下列几类：

(1) 平动

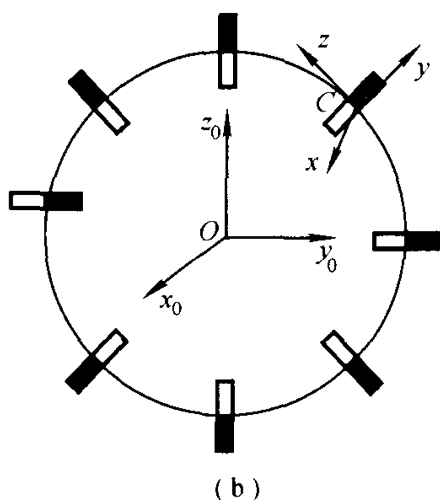
如果刚体在运动过程中，两个坐标系的各坐标轴永远互相平行，这种运动称为**平动**．此时刚体上所有质点，都有相同的速度和加速度，故刚体上任意一点(我们不妨就取为 C 点)的运动就可以代表整个刚体的运动，所以刚体平动时和质点的运动完全一样，其自由度为 3，可取 C 点的 3 个坐标 x_C、y_C、z_C 为广义坐标．平动不一定是直线运动．如图 4.1(a)所示的刚体运动就是一种平动，这里每个质点都作圆周运动．但图 4.1(b)所示的刚体运动就不再是平动，因为在这种运动过程中，固定在刚体上的坐标轴并非时刻保持和 $Ox_0y_0z_0$ 的轴平行．

(2) 定轴转动

如果刚体在运动过程中,至少有两个质点保持不动,那么将这两个质点的连线取为两个坐标系的一个公共坐标轴(z 轴),则刚体上各点都绕此轴作圆周运动,这种运动称为**定轴转动**. 刚体在任一时刻的位置可用 Ox 轴相对于 Ox_0 轴转过的角度 ψ 来确定,如图 4.2 所示,其自由度为 1,ψ 就是广义坐标.



(a)



(b)

图 4.1

(3) 平面平行运动

如果在运动过程中,刚体中任意一点始终在平行于某一固定平面的平面内运动,则称为**平面平行运动**,简称**平面运动**,此时只需研究刚体中任一和固定平面平行的截面的运动就够了.

若我们取固定平面为 Ox_0y_0 平面,则刚体的平面运动就是 Cxy 相对于 Ox_0y_0 的运动. 这种运动总可以分解为两步:设 $t=0$ 时,Cxy 和 Ox_0y_0 重合,第一步,使 Cxy 相对于 Ox_0y_0 作平动,达到 $Cx'y'$ 的位置;第二步,$Cx'y'$ 绕 C 点转过角度 ψ,达到新的位置 Cxy,如图 4.3 所示. 平动部分可用 C 点在 Ox_0y_0 系中的坐标 x_{0C}、y_{0C} 来表示,转动部分可用 Cx 轴相对于 Ox_0 轴转过的角度 ψ 来表示. 因此刚体平面运动可用 3 个独立的坐标 x_{0C}、y_{0C}、ψ 完全确定,所以它有 2 个平动自由度,1 个转动自由度.

(4) 定点转动

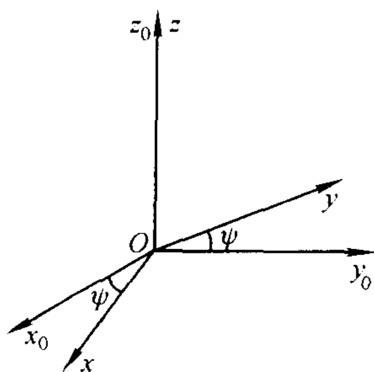


图 4.2

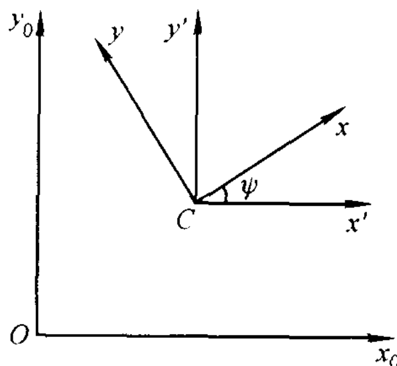


图 4.3

刚体在运动过程中,有一点永远保持不动.我们可取这个固定点为上述两个坐标系的公共原点,坐标轴之间的夹角则可任意改变.可以证明,在这种情况下刚体从一个初位置运动到任意一个新的位置时,恒可通过三个独立的角坐标来表示.设 $t=0$ 时,坐标系 $Oxyz$ 和 $Ox_0y_0z_0$ 重合,如图 4.4(a);在时刻 t,坐标系 $Oxyz$ 运动到一个新的位置,如图 4.4(d).这个运动可看作三个独立的转动所合成.首先,令 Oxy 平面绕 Oz_0 轴转过一个角度 φ,使 Ox 轴达到图 4.4(d)中 Oxy 平面和 Ox_0y_0 平面的交线 ON 的位置,变为 $Ox'y'z'$ 如图 4.4(b).交线 ON 称为**节线**.其次,使 $Oy'z'$ 平面绕节线 ON 转过角度 θ,使坐标轴到达新位置 $Ox''y''z''$,使 Oz'' 轴和图 4.4(d)中 Oz 轴位置重合.最后,令 $Ox''y''$ 平面绕 Oz'' 轴转过角度 ψ,使坐标轴达到图 4.4(d)中的最终位置.

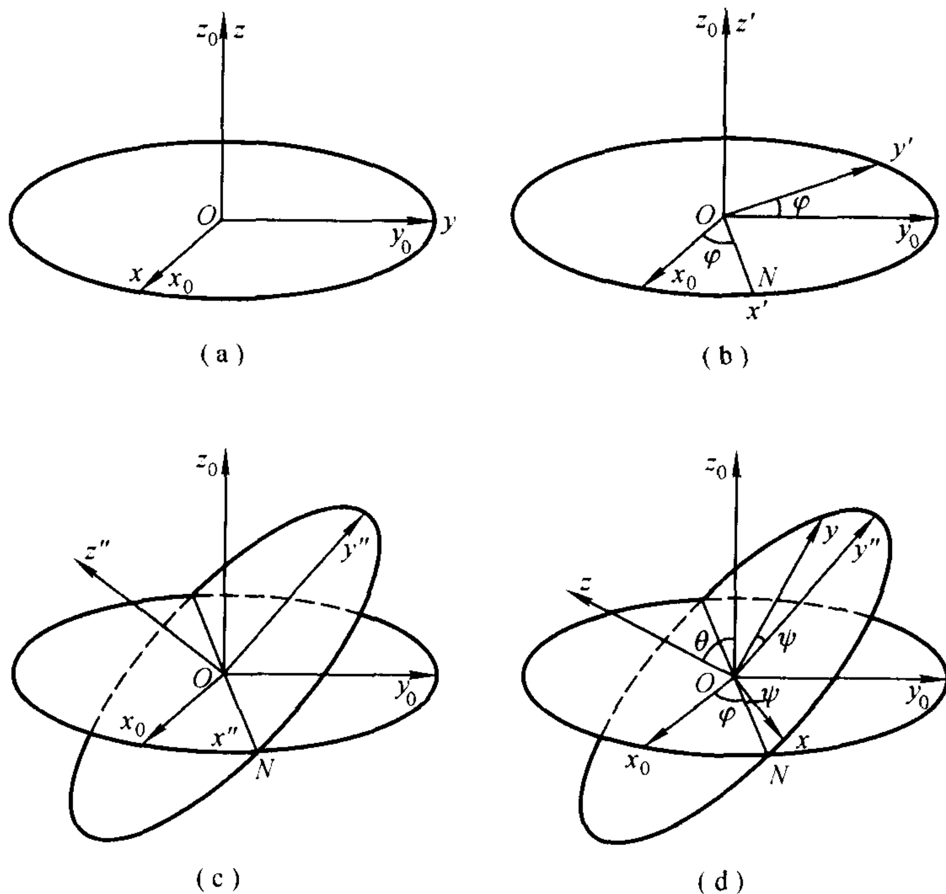


图 4.4

上述 φ、θ、ψ 三个角坐标称为**欧拉角**,φ 称为**进动角**,θ 称为**章动角**,ψ 称为**自转角**,这三个角度的变化范围为:

$$0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi,0\leqslant\psi\leqslant2\pi.$$

从上面的讨论可知,作定点转动时,刚体在空间的任一位置可由三个欧拉角唯一确定,所以三个欧拉角就是刚体定点转动的广义坐标.

但是这种描述方法不是唯一的.例如我们也可以把刚体定点转动看成是转

动轴 Oz 方向可以任意变化的定轴转动．要确定 Oz 轴的方向，可用球坐标的**余纬角** θ 和**经度角** φ 来表示，再加上绕轴 Oz 的转角 ψ，它们同样可以唯一地确定刚体在空间的位置，也是广义坐标．这三个角坐标和三个欧拉角并不完全一样，其中 θ 和 ψ 是一样的，但两者的 φ 并不一样．

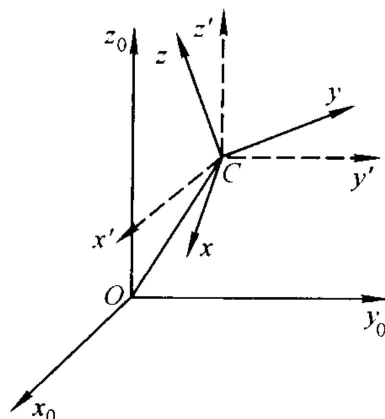


图 4.5

(5) 一般运动

刚体作一般运动时，恒可以分解为平动（用刚体上任意一点 C 的运动表示）和定点转动（绕 C 点的转动）两部分，如图 4.5 所示．平动部分可用 C 点的三个坐标 x_{0C}、y_{0C}、z_{0C} 描述，定点转动部分可用三个欧拉角 φ、θ、ψ 描述．这 6 个坐标就是刚体作一般运动时的广义坐标．

§4.2 刚体的角速度

从上节的讨论可知，刚体的平动和质点的运动一样．所以对于刚体的平动我们不需要另作专门的讨论．刚体运动的特殊性是它的转动，我们可用**角位移**和**角速度**来描述刚体转动的性质．

刚体转动可分为定轴转动和定点转动两种情况．应用上节引用的两种坐标系的符号，定轴转动的角位移 $\Delta\boldsymbol{n}$ 可表示为

$$\Delta\boldsymbol{n} = \Delta\psi\boldsymbol{k}, \tag{2.1}$$

式中 $\boldsymbol{k}$ 为两个坐标系的公共 z 轴（即转动轴方向）的单位矢量，ψ 为 Ox 轴与 Ox_0 轴的夹角，即刚体转过的角度．角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 是角位移对时间的微商，由(2.1)式得

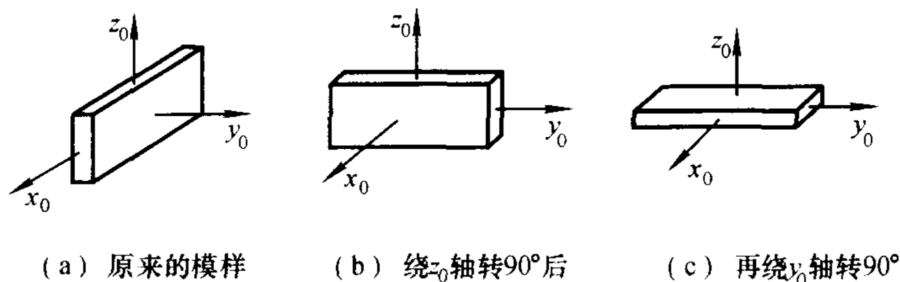
$$\boldsymbol{\omega} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{n}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}t} = \dot{\psi}\boldsymbol{k}. \tag{2.2}$$

现在转入讨论定点转动的角位移和角速度．在定轴转动中，角位移和角速度的方向不变．刚体绕定点转动时，转动轴的方向不断在变，情况就两样了．

我们知道，矢量除了有大小和方向外，还必须遵守平行四边形加法的对易律：

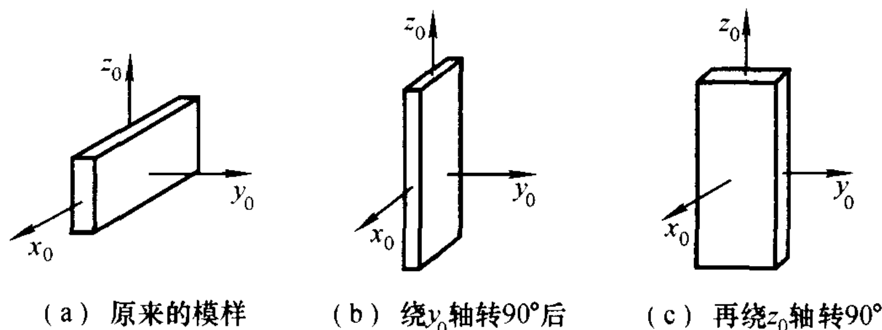
$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A},$$

刚体定点转动时，有限角位移不满足上述对易律．所以有限角位移不是矢量．这一点可用一实例来加以说明．图 4.6 画出了一个长方形的砖块，如果把它先绕 z_0 轴转 90°，再绕 y_0 轴转 90°，得到图 4.6(c)所示的模样．但如果先绕 y_0 轴转 90°，再绕 z_0 轴转 90°，则得到图 4.7(c)所示的模样．它们显然不同，因此有限



(a) 原来的模样　(b) 绕z_0轴转90°后　(c) 再绕y_0轴转90°

图 4.6



(a) 原来的模样　(b) 绕y_0轴转90°后　(c) 再绕z_0轴转90°

图 4.7

转动不满足对易律，所以非定轴的有限转动不是矢量.

如果是无限小转动，情况就两样了. 设刚体绕过定点 O 的某一轴线转动了一微小角度 $\Delta\varphi$，根据对定轴转动的规定，用转动轴上的有方向线段 $\Delta\boldsymbol{n}$ 来表示角位移，其大小和角位移 $\Delta\varphi$ 相当，如图 4.8 所示. 设 $\boldsymbol{r}$ 为刚体上任一点 P 在转动前的位置矢量，$\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}$ 为转动后的位置矢量，则 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的大小为

$$\Delta r = PM\Delta\varphi = r\sin\theta\Delta\varphi.$$

$\Delta\boldsymbol{r}$ 的方向既和 $\boldsymbol{r}$ 垂直，也和 $\Delta\boldsymbol{n}$ 垂直. 因此，$\Delta\boldsymbol{r}$ 可表示为

$$\Delta\boldsymbol{r} = \Delta\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r}. \qquad (2.3)$$

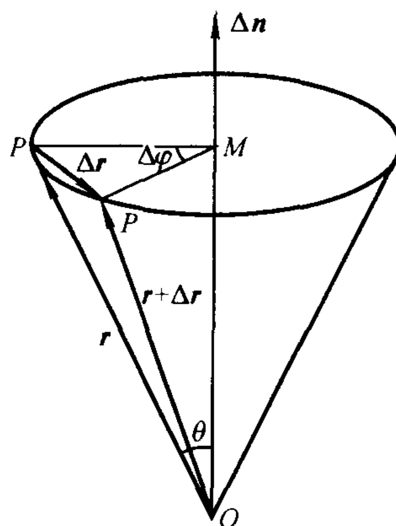


图 4.8

设刚体发生了两次绕 O 点的无限小转动 $\Delta\boldsymbol{n}_1$ 和 $\Delta\boldsymbol{n}_2$. 如果先转 $\Delta\boldsymbol{n}_1$ 后转 $\Delta\boldsymbol{n}_2$，则由(2.3)可得

$$\boldsymbol{r}\xrightarrow{\Delta\boldsymbol{n}_1}\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{r},$$

$$\boldsymbol{r}'\xrightarrow{\Delta\boldsymbol{n}_2}\boldsymbol{r}'' = \boldsymbol{r}'+\Delta\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{n}_2\times\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{n}_2\times(\Delta\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{r}). \qquad (2.4)$$

如果先转 $\Delta\boldsymbol{n}_2$，后转 $\Delta\boldsymbol{n}_1$，则

$$\boldsymbol{r}\xrightarrow{\Delta\boldsymbol{n}_2}\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{n}_2\times\boldsymbol{r},$$

$$\boldsymbol{r}'\xrightarrow{\Delta\boldsymbol{n}_1}\boldsymbol{r}'' = \boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{n}_2\times\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{n}_1\times(\Delta\boldsymbol{n}_2\times\boldsymbol{r}). \qquad (2.5)$$

比较(2.4)和(2.5)两式，第一项完全一样，第二项和第三项次序不同．但由于 $\Delta \boldsymbol{n}\times \boldsymbol{r}=\Delta \boldsymbol{r}$ 是线位移，满足对易律．因此(2.4)和(2.5)两式中的前三项都是相等的．但一般情况下 $\Delta \boldsymbol{n}_2\times(\Delta \boldsymbol{n}_1\times \boldsymbol{r})$ 和 $\Delta \boldsymbol{n}_1\times(\Delta \boldsymbol{n}_2\times \boldsymbol{r})$ 的大小和方向都不一样，只有当 $\Delta \boldsymbol{n}_1$ 和 $\Delta \boldsymbol{n}_2$ 方向相同时，这两项才相等，这就是定轴转动的情况．另外，如果 $\Delta \boldsymbol{n}_1$ 和 $\Delta \boldsymbol{n}_2$ 都是无穷小转动，那么(2.4)和(2.5)中的最后一项与前面的项相比可以忽略，于是(2.4)和(2.5)仍然相等．因此**两个无穷小转动满足对易律**．由此可见有限角位移不是矢量，而**无穷小角位移是矢量**．

角速度是角位移对时间的微商：

$$\boldsymbol{\omega}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{n}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}t}.$$

$\mathrm{d}\boldsymbol{n}$ 是矢量，$\mathrm{d}t$ 是标量，因此 $\mathrm{d}\boldsymbol{n}/\mathrm{d}t$ 必为矢量．如果一个刚体同时参与几个转动，则角速度一定是各个单独转动的角速度的矢量和．

结合上节的讨论，我们可以认为刚体的定点转动是由三个互相独立的转动——进动、章动和自转合成的．因此刚体定点转动的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 可表示为进动角速度 $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$、章动角速度 $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ 和自转角速度 $\dot{\boldsymbol{\psi}}$ 的合成：

$$\boldsymbol{\omega}=\dot{\boldsymbol{\varphi}}+\dot{\boldsymbol{\theta}}+\dot{\boldsymbol{\psi}}. \tag{2.6}$$

从图 4.4 中可看到，进动角速度 $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ 沿 Oz_0 轴方向，章动角速度 $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ 沿节线 ON 方向，自转角速度 $\dot{\boldsymbol{\psi}}$ 沿 Oz 轴方向．如果我们用 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 分别表示 $Oxyz$ 和 $Ox_0y_0z_0$ 坐标系的单位矢量，并考虑到

$$\boldsymbol{e}_3=\sin\theta(\sin\psi\boldsymbol{i}+\cos\psi\boldsymbol{j})+\cos\theta\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{k}'=\sin\theta(\sin\varphi\boldsymbol{e}_1-\cos\varphi\boldsymbol{e}_2)+\cos\theta\boldsymbol{e}_3,$$

$$\frac{\overrightarrow{ON}}{ON}=\cos\varphi\boldsymbol{e}_1+\sin\varphi\boldsymbol{e}_2=\cos\psi\boldsymbol{i}-\sin\psi\boldsymbol{j},$$

则

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}=\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3=\dot{\varphi}(\sin\theta\sin\psi\boldsymbol{i}+\sin\theta\cos\psi\boldsymbol{j}+\cos\theta\boldsymbol{k}),$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}=\dot{\theta}(\cos\varphi\boldsymbol{e}_1+\sin\varphi\boldsymbol{e}_2)=\dot{\theta}(\cos\psi\boldsymbol{i}-\sin\psi\boldsymbol{j}),$$

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}=\dot{\psi}(\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_1-\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_2+\cos\theta\boldsymbol{e}_3)=\dot{\psi}\boldsymbol{k}.$$

将它们代入(2.6)式，即可分别得到刚体的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 在 $Ox_0y_0z_0$ 系中的表示为：

$$\begin{cases}\omega_{0x}=\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi+\dot{\theta}\cos\varphi,\\ \omega_{0y}=-\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi+\dot{\theta}\sin\varphi,\\ \omega_{0z}=\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi}.\end{cases} \tag{2.7}$$

在 $Oxyz$ 系中的表示式为：

$$\begin{cases}\omega_x=\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi,\\ \omega_y=\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi-\dot{\theta}\sin\psi,\\ \omega_z=\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}.\end{cases} \tag{2.8}$$

这两组方程式通常称为**刚体定点转动的欧拉运动学方程**. 需要强调指出,讨论刚体运动时,不要把转动和滚动,平动和滑动这两对概念混为一谈. 转动和平动指的是固定在空间的坐标系和固定在刚体上的坐标系之间的相对方向,有变化的就有转动(有角速度),无变化的就是平动(角速度为零). 而滚动和滑动则是对两个刚体接触点的性质而言的. 如果接触点的相对速度为零,则称一个刚体在另一个刚体上作纯滚动. 如果接触点的相对速度不为零,则存在滑动. 只有轮子沿直线运动时,滚动和转动,平动和滑动之间才存在某种内在联系. 除此之外,这两对运动是完全不相关的概念.

§4.3 刚体上任一点的线速度和线加速度

从上两节的讨论可知,刚体的平动可由 C 点的运动来表示,而刚体的转动则可由角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 来描述. 因此,由 C 点的速度$\boldsymbol{v}_C$ 和角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 可决定刚体上任一点的线速度和线加速度.

先讨论刚体只有转动没有平动的情况. 上节(2.3)式已经给出,当刚体有一无限小转动 $\Delta\boldsymbol{n}$ 时,刚体上任一点 P 的线位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 为

$$\Delta\boldsymbol{r} = \Delta\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r},$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 为P 点的位置矢量. 因此 P 点线速度为

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r}}{\Delta t}.$$

按角速度的定义,$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\boldsymbol{n}}{\Delta t} = \boldsymbol{\omega}$. 因此上式可写为

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}. \tag{3.1}$$

而 P 点的加速度为

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}). \tag{3.2}$$

这两个公式无论对定轴转动还是定点转动都是适用的.

(3.1)式中的 $\boldsymbol{r}$ 是刚体上两点之间的位移矢量,当刚体运动时,$\boldsymbol{r}$ 的方向将不断改变. 但它的大小是固定不变的,因此 $\boldsymbol{r}$ 是常模矢量. 如果我们把常模矢量看成一根有方向的棒,那么由(3.1)式可以推断:任一常模矢量 $\boldsymbol{A}$ 对时间的微商,等于代表常模矢量(即棒)运动的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 和常模矢量本身的矢量积:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}. \tag{3.3}$$

利用上式就可以很方便地求单位矢量对时间的微商. 例如在球面坐标中,径向

单位矢量 e_r(图 4.9)的角速度为 $\boldsymbol{\omega}=\dot{\boldsymbol{\theta}}+\dot{\boldsymbol{\varphi}}=\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\varphi+\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3$,因此

$$\dot{\boldsymbol{e}}_r=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_r=\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta+\dot{\varphi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi,$$

和 §1.2 中所导出的结果完全一样.

如果刚体既有转动又有平动,那么刚体上任一点的速度除了转动所引起的速度 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ 外,还应加上平动的速度. 解决这个问题有两种方法:**固定基点法**和**瞬时转轴法**.

先讨论固定基点法. §4.1 中指出,刚体作平动时,刚体上各点平动的速度是一样的,我们不妨就用 $Cxyz$ 系的坐标原点 C 点速度$\boldsymbol{v}_C$ 来表示. 因此刚体作一般运动时,刚体上任一点 P 的速度可表示为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r},\tag{3.4}$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 为P 点相对C 点的位置矢量,C 点称为**基点**. (3.4)式表明:刚体上任一点 P 的速度等于基点C 的速度$\boldsymbol{v}_C$,加上绕基点 C 转动的速度$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$. C 点在刚体上的位置是固定的.

描写刚体运动时,选哪一点作基点,或者说选哪一点作为 $Cx'y'z'$系的坐标原点是任意的. 选不同的基点,(3.4)式中的$\boldsymbol{v}_C$和$\boldsymbol{r}$ 将随之改变,但刚体的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 并不改变,证明如下:

如图 4.10 所示,如果我们取 C 点为基点,则任一点 P 的速度按(3.4)式应为

$$\boldsymbol{v}_P=\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}.$$

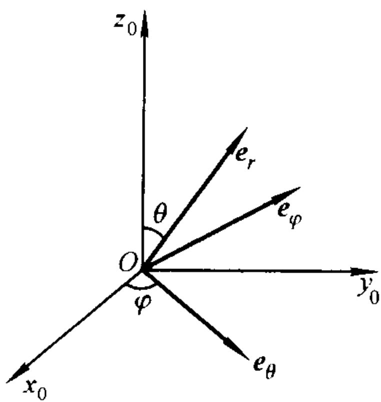


图 4.9

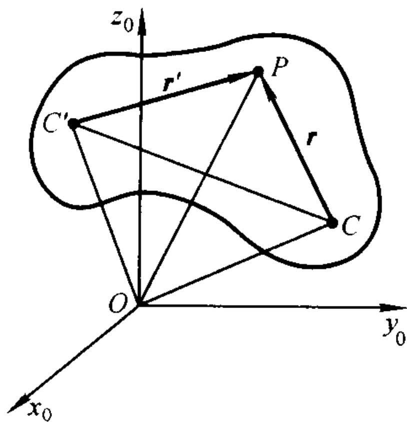


图 4.10

另一点 C'的速度为

$$\boldsymbol{v}_{C'}=\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{CC'}.$$

这两个式子中的 $\boldsymbol{\omega}$ 都是刚体绕C 点转动的角速度. 现在如果我们改选 C'点为基点,设刚体绕 C'点的角速度为$\boldsymbol{\omega}'$,按(3.4)式,P 点的速度应为

$$\boldsymbol{v}_P=\boldsymbol{v}_{C'}+\boldsymbol{\omega}'\times\boldsymbol{r}'.$$

将上面的$\boldsymbol{v}_C$和$\boldsymbol{v}_{C'}$的表示式代入,并考虑到 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{CC'}+\boldsymbol{r}'$,得

$$(\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\omega}')\times\boldsymbol{r}'=0.$$

因 P 是刚体中的任意一点,要使上式成立,必须使 $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}'$. 这就证明了刚体的角速度和基点的选取无关.

由(3.4)式可得刚体上任意一点的线加速度为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{a}_C+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}), \tag{3.5}$$

式中 $\boldsymbol{a}_C$ 是基点 C 的加速度,$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}$是刚体的角加速度. 对于平面平行运动,因 $\boldsymbol{\omega}\perp\boldsymbol{r}$,此时

$$\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r})-\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega})=-\omega^2\boldsymbol{r}.$$

因此(3.5)式可简化为

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_C+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r}-\omega^2\boldsymbol{r}. \tag{3.6}$$

下面介绍**瞬时转轴法**. 先讨论平面平行运动的情况. 这种情况下角速度恒垂直于运动平面,因此如果已知刚体的角速度 ω 和刚体上某一点 P 的线速度 $\boldsymbol{v}_P$,总可以通过 P 点作一条和 $\boldsymbol{v}_P$ 垂直的直线 PQ,并使 Q 点的位置满足条件

$$\boldsymbol{v}_P=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{QP}.$$

将上式和(3.4)式比较,可知上式相当于取 Q 点为基点,并且基点的速度为零. 基点速度为零,意味着此刻刚体没有平动,只有纯转动,Q 点是转动轴线和平面的交点. 显然 Q 点的位置不是固定的,不同瞬时,Q 点的位置不同,所以 Q 点称为**瞬时转动中心**,或**瞬时转心**. 这样,刚体上任意一点 P 的速度就可以用纯转动的公式(3.1)求得,即

$$\boldsymbol{v}_P=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{QP}. \tag{3.7}$$

根据瞬时转心的定义,显然还可以通过下面两种方法找到瞬时转心:(1) 找出刚体上瞬时速度为零的点,这一点必是瞬时转心. 例如轮子在轨道上作纯滚动时,接触点的速度为零,这一点就是瞬时转心. (2) 如已知刚体上两点 A 和 B 的速度方向,分别过 A 点和 B 点作 $\boldsymbol{v}_A$ 和 $\boldsymbol{v}_B$ 的垂线,其交点必为瞬时转心,如图 4.11所示.

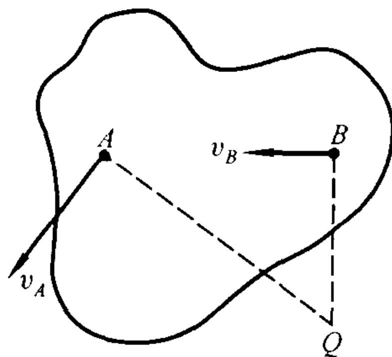


图 4.11

刚体作一般运动时,也可用瞬时转轴法来描述. 如果在某一瞬时我们能在刚体上找到两个速度为零的点,则此两点的连线就是刚体的瞬时转轴. 找到了瞬时转轴,刚体上任一点的速度公式就可以直接用纯转动的公式(3.1)来表示了.

必须注意,瞬时转心或瞬时转轴上各点的瞬时速度为零.但瞬时加速度不为零.因此用瞬时转轴法求刚体上各点的线加速度时,不能直接用纯转动的加速度公式(3.2),而必须先求出速度$\boldsymbol{v}$,然后再按$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$求出加速度.

下面我们举几个例题.

【例 1】 半径为 R 的轮子在直线轨道上只滚不滑,质心 C 的速度为常数$\boldsymbol{v}_0$,求轮子边缘上任一点 P 的速度和加速度.

解:如图 4.12 所示,P 为轮缘上的任意一点.设 P 点和轨道接触时轮心在 O 点,取此点为固定坐标的原点,并取 Ox_0y_0 坐标系如图所示.经过时刻 t 后,轮子转过了角度 ψ. P 点是固定在轮子上的,因此可取 CP 为 Cxy 坐标系中的 x 轴. ψ 就是 Cx 轴和 Ox_0 轴的夹角,因此轮子的角速度 $\omega=\dot{\psi}$.

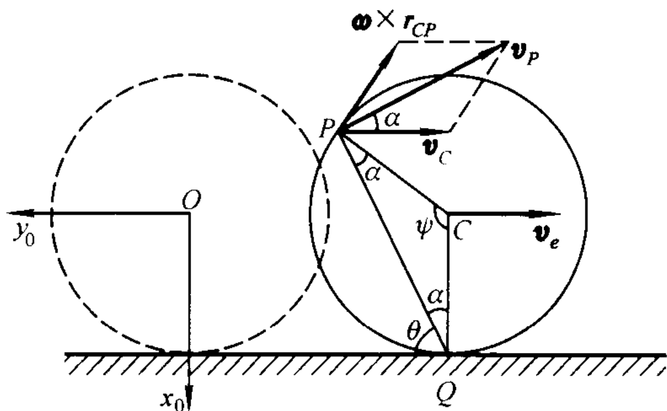


图 4.12

轮子在直线轨道上滚动而不滑动,轮心移动的距离 OC 应等于轮周滚过的弧长$\overset{\frown}{QP}$.因轮心的速度为常数 v_0,所以 $OC=v_0t$,而弧长$\overset{\frown}{QP}=R\psi$,因此有约束关系 $v_0t=R\psi$.由此即可得出轮子的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的大小:

$$\omega=\dot{\psi}=\frac{v_0}{R}, \tag{1}$$

ω 的方向垂直纸面向里.我们先用基点法来求 P 点的速度$\boldsymbol{v}_P$.取轮心 C 为基点,则

$$\boldsymbol{v}_P=\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{CP}. \tag{2}$$

由(1)可知$|\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{CP}|=R\omega=v_0$. $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{CP}$垂直于半径$CP$,$\boldsymbol{v}_0$平行于轨道.根据图中的几何关系,$\boldsymbol{v}_P$的大小可表示为

$$|\boldsymbol{v}_P|=2v_0\cos\alpha=2v_0\sin\theta, \tag{3}$$

式中 θ 为PQ 和直线轨道的夹角.

我们也可以用瞬时转心法来求$\boldsymbol{v}_P$.轮子和轨道的接触点 Q 就是轮子作纯滚动时的瞬时转动中心,所以

$$\boldsymbol{v}_P=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{QP}.$$

因 $r_{QP}=2R\cos\alpha=2R\sin\theta$,$\omega=\frac{v_0}{R}$,代入上式得

$$|\boldsymbol{v}_P| = 2v_0\cos\alpha = 2v_0\sin\theta,$$

$\boldsymbol{v}_P$的方向和QP垂直,同上面以轮心为基点所得出的结果一样.

再求P点的加速度$\boldsymbol{a}_P$,用基点法. 因本题的$\boldsymbol{v}_C$和$\boldsymbol{\omega}$都是常数,因此$\boldsymbol{a}_C$和$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}$均为零. 所以由(3.6)式得

$$\boldsymbol{a}_P = -\omega^2\boldsymbol{r} = -\frac{v_0^2}{R^2}\boldsymbol{r}_{CP},$$

其大小为v_0^2/R,方向指向轮心C.

【例 2】 半径为l的圆盘垂直于地面作纯滚动,圆盘中心C以速率$v_C = \omega_1 R$沿着半径为R的圆周运动,求圆盘边缘上任一点P的速度.

解:如图4.13所示,盘子在转动过程中,盘上各点和O点的相对距离永远保持不变,因此圆盘的运动可以看成是绕O点的定点转动,OQ为其瞬时转动轴线.

我们用欧拉角来写出圆盘的角速度. 从图4.14中可看出,本题中$\theta = 90°$,$\dot{\theta} = 0$,$\dot{\varphi} = \omega_1$,$\dot{\psi} = -\omega_2$. 由于圆盘只滚不滑,ω_1和ω_2之间存在约束关系:

$$v_C = l\omega_2 = R\omega_1.$$

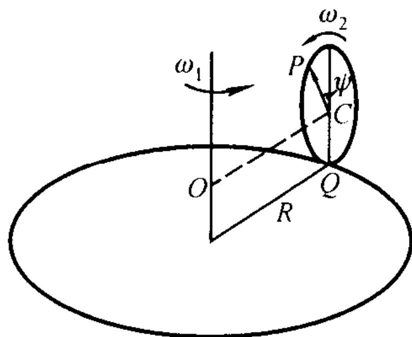


图 4.13

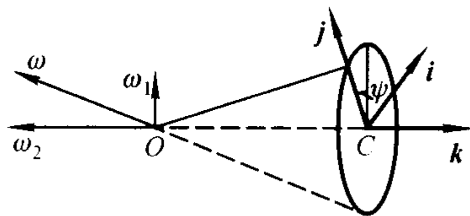


图 4.14

由此可得

$$\omega_2 = \frac{R}{l}\omega_1.$$

将这些代入欧拉运动学方程(2.8)式,得圆盘的角速度为

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\sin\psi\boldsymbol{i} + \omega_1\cos\psi\boldsymbol{j} - \frac{R}{l}\omega_1\boldsymbol{k}.$$

圆盘边缘上任一点P的位置矢量$\boldsymbol{r}$为

$$\boldsymbol{r} = R\boldsymbol{k} + l\boldsymbol{j}.$$

所以

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} = R\omega_1(1+\cos\psi)\boldsymbol{i} - R\omega_1\sin\psi\boldsymbol{j} + l\omega_1\sin\psi\boldsymbol{k}.$$

【例 3】 长为l的直尺AB,其端点A与B被约束在互相正交的直线导槽Ox及Oy上滑动. 求直尺运动时瞬时转动中心的轨道.

解:刚体作平面运动时,瞬时转动中心Q在固定坐标系Oxy中的轨迹称为空间极迹,在和刚体一起运动的坐标系$Cx'y'$中的轨迹称为**本体极迹**. 本题中直尺AB运动时A点和B点

的速度方向分别沿Ox轴和Oy轴,因此过A点和B点,分别作Ox轴和Oy轴的垂线,其交点Q即为直尺的瞬时转动中心,Q点在Oxy系中的坐标为

$$\begin{cases} x = l\sin\theta, \\ y = l\cos\theta. \end{cases}$$

两式平方相加得

$$x^2 + y^2 = l^2,$$

这是一个以O点为圆点,半径为l的圆,它在第一象限的部分就是此直尺的空间极迹方程.

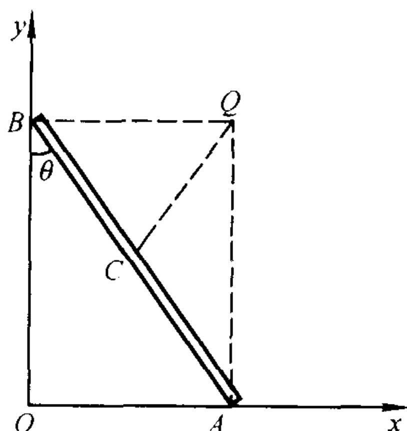


图 4.15

为了给出本体极迹方程,取棒的中点C为坐标系$Cx'y'$的原点,并取Cy'轴沿棒的方向,Cx'轴垂直于棒. 显然在$Cx'y'$系中,Q点与C点的距离为常数:$CQ=\frac{l}{2}$. 因此Q点在$Cx'y'$系中的轨迹也是一个圆,圆心在直尺AB的中点C,半径为尺长AB的一半$\left(\frac{l}{2}\right)$,这个圆的上半部分就是直尺运动的本体极迹.

§4.4 刚体运动的动力学方程

在§4.1中我们指出,刚体可看成是一种特殊的质点系. 因此质点系动量定理、角动量定理和动能定理对刚体也是适用的. 刚体具有6个自由度,如取质心C为基点,则3个平动自由度的运动可由质点系的质心运动定律

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_C}{\mathrm{d}t} = \sum_i \boldsymbol{F}_i^{(e)} \tag{4.1}$$

来决定. 3个转动自由度的运动,则可由角动量定理

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^{(e)} \tag{4.2}$$

来决定. 也可以用质点系的动能定理

$$\mathrm{d}T = \sum_i (\boldsymbol{F}_i^{(e)} + \boldsymbol{F}_i^{(i)}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i = \sum_i \boldsymbol{F}_i^{(e)} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i \tag{4.3}$$

来取代(4.1)或(4.2)中的一个方程. (4.3)中利用了刚体内部各质点相对距离不变(即内力作功为零)的条件. 总之,由(4.1)、(4.2)和(4.3)7个方程中选取6个即可建立起刚体运动的动力学方程.

我们也可以应用拉格朗日方程来建立刚体运动的动力学方程. 取刚体的质心坐标$\boldsymbol{r}_C$和欧拉角θ、φ、ψ为广义坐标,写出刚体的动能T和势能V. 然后代入拉格朗日方程,即可得到6个动力学方程.

因此,可以说刚体运动的动力学方程的一般形式,原则上在第一章和第二章

已经给出. 要使方程具体化,只要给出在刚体条件下质心 $\boldsymbol{r}_C$、角动量 $\boldsymbol{L}$、动能 T 和势能 V 的具体表示式即可.

由于刚体内部各质点间的相对距离保持不变,因此刚体内部的势能 $V^{(i)}$ 为常数,刚体的总势能 V 只决定于外场 $V^{(e)}$. 根据定义,刚体的质心为

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\iiint \boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V}{m}, \tag{4.4}$$

式中 $\rho(\boldsymbol{r})$为刚体的密度,m 为刚体的总质量. 因此需要具体讨论的只是角动量 $\boldsymbol{L}$ 和动能 T 的表示式. 由于刚体的一般运动由平动和转动两部分合成,平动部分总可归并到质心运动中去,而质心运动可由质心运动定理完全决定,因此在写出刚体角动量 $\boldsymbol{L}$ 和动能 T 的表示式的时候,我们可不考虑平动部分,只要写出转动部分的 $\boldsymbol{L}$ 和 T 的表示式就可以了.

将刚体转动时刚体上任一点线速度的表示式$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i$ 代入质点系角动量的一般表示式,即可得刚体转动时角动量 $\boldsymbol{L}$ 的表示式:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L} &= \sum_i (\boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i) = \sum_i [\boldsymbol{r}_i \times m_i(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)] \\ &= \sum_i m_i [r_i^2 \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r}_i)\boldsymbol{r}_i], \end{aligned} \tag{4.5}$$

当质量连续分布时,上式变为

$$\boldsymbol{L} = \iiint [r^2 \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{r}]\mathrm{d}m. \tag{4.6}$$

刚体转动部分的动能为

$$\begin{aligned} T &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i) \\ &= \frac{1}{2}\sum_i m_i \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i) = \frac{1}{2}\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

要进一步使 $\boldsymbol{L}$ 和 T 的表示式具体化,需要做(4.6)式中的两个积分 $\iiint r^2 \boldsymbol{\omega}\mathrm{d}m$ 和 $\iiint (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{r}\mathrm{d}m$. 我们将在下面几节分别对不同情况作具体讨论.

§4.5 刚体的平面平行运动

刚体作平面平行运动时,刚体角速度的方向是不变的,可令这个方向为 z 轴的方向,$\boldsymbol{k}$ 为其单位矢量,因此 $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{k}$. 刚体角动量 $\boldsymbol{L}$ 在 z 轴方向的分量为 $L_z = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{k}$. 角动量定理可表示为

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = M_z. \tag{5.1}$$

下面我们来求 L_z 和 T 的表示式. 如图 4.16 所示,由(4.6)式得

$$\begin{aligned} L_z &= \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{k} \\ &= \iiint[r^2\boldsymbol{\omega}-(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}]\cdot\boldsymbol{k}\mathrm{d}m \\ &= \iiint R^2\omega\mathrm{d}m = I\omega, \end{aligned} \tag{5.2}$$

式中

$$I = \iiint R^2\mathrm{d}m, \tag{5.3}$$

称为**刚体绕过 O 点的定轴转动的转动惯量**,R 是质量元 $\mathrm{d}m$ 到轴的距离. 由(4.7)式,刚体的动能可表示为

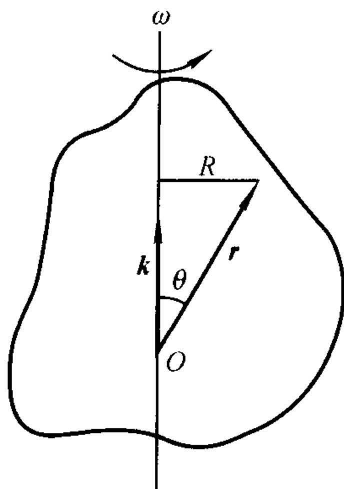


图 4.16

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}L_z\omega = \frac{1}{2}I\omega^2. \tag{5.4}$$

这样,要建立刚体平面平行运动的动力学方程,最后归结到求刚体绕固定轴的转动惯量 I.

从转动惯量的表示式(5.3)可知,刚体绕定轴的转动惯量的大小,既决定于刚体内部的质量分布,又决定于转动轴线的位置和方向. 但是可以证明:物体对于任一固定轴线的转动惯量 I,等于通过质心 C 的平行轴的转动惯量 I_C,加上刚体的质量 m 与两轴间的垂直距离 d 的平方的乘积,即

$$I = I_C + md^2. \tag{5.5}$$

这个关系称为**平行轴定理**. 证明如下:

如图 4.17 所示,取截面为 Oxy 平面,设 C 为刚体质心,P 为刚体中任意一点,考察刚体绕通过 C 点和 P 点的两根垂直于截面的互相平行的轴的转动惯量 I_C 和 I. 设两轴间的距离为 d,截面上任一质量元 $\mathrm{d}m$ 到 C 轴和 P 轴的距离分别为 R 和 R',取 C 点为坐标原点,CP 方向为 x 轴,由余弦定理得

$$R'^2 = R^2 + d^2 - 2dR\cos\theta = R^2 + d^2 - 2xd,$$

式中 $x = R\cos\theta$ 为质量元 $\mathrm{d}m$ 所在的 x 坐标. 将上式代入(5.3)即得

$$\begin{aligned} I_P &= \int R'^2\mathrm{d}m = \int(R^2 + d^2 - 2xd)\mathrm{d}m \\ &= I_C + md^2. \end{aligned}$$

上式最后一步利用了质心的定义 $\int x\mathrm{d}m = mx_C = 0$. 这就证明了平行轴定理.

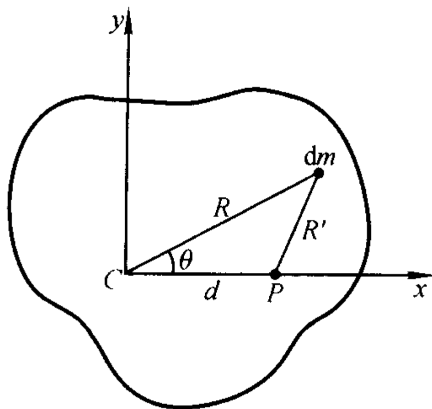


图 4.17

如果令

$$I = m\rho^2, \tag{5.6}$$

其中 m 为刚体的质量，则 ρ 称为刚体对转动轴的**回转半径**. 如把刚体的质量集中于一点，则此点到转动轴的距离为 ρ，此质点绕轴的转动惯量和刚体绕同一轴的转动惯量相等. 相对于过质心 C 的转动轴的回转半径称为**主回转半径**，即 $I_C = m\rho_C^2$，由平行轴定理可得

$$\rho^2 = \rho_C^2 + d^2 \tag{5.7}$$

显然，主回转半径 ρ_C 是最小的回转半径.

表 4.1 均匀刚体绕对称轴的转动惯量

物体(质量为 m)	坐标轴(惯量主轴)	绕三个坐标轴的转动惯量(主转动惯量)
长方形板(边长为 $2a$ 和 $2b$)	Ox 和 Oy 轴依次平行于边 $2a$ 和 $2b$，Oz 垂直于板面	$I_{11} = mb^2/3$ $I_{22} = ma^2/3$ $I_{33} = m(a^2+b^2)/3$
实心长方体(边长 $2a, 2b, 2c$)	Ox、Oy 和 Oz 轴依次平行于边 $2a$、$2b$ 和 $2c$	$I_{11} = m(b^2+c^2)/3$ $I_{22} = m(c^2+a^2)/3$ $I_{33} = m(a^2+b^2)/3$
圆板(半径为 a)	Ox 和 Oy 轴在板面上，Oz 轴垂直板面	$I_{11} = I_{22} = ma^2/4$ $I_{33} = ma^2/2$
椭圆板(长、短轴为 $2a$、$2b$)	Ox 轴和 Oy 轴依次沿半轴 a 和 b，Oz 轴垂直于板面	$I_{11} = mb^2/4$ $I_{22} = ma^2/4$ $I_{33} = m(a^2+b^2)/4$
实心圆柱体(半径为 a，长为 l)	Ox、Oy 垂直于对称轴，Oz 轴即为其轴线	$I_{11} = I_{22} = m(3a^2+l^2)/12$ $I_{33} = ma^2/2$
实心椭圆柱体(椭圆半轴为 a、b，长为 l)	Ox 轴 Oy 轴依次沿椭圆半轴 a、b，z 轴为柱体轴线	$I_{11} = m(3b^2+l^2)/12$ $I_{22} = m(3a^2+l^2)/12$ $I_{33} = m(a^2+b^2)/4$
球壳(外半径为 a，内半径为 b)	Ox、Oy、Oz 为任意三条互相垂直的轴线	$I_{11} = I_{22} = I_{33} = \frac{2}{5}m\frac{a^5-b^5}{a^3-b^3}$
实心球体(半径为 a)	同上	$I_{11} = I_{22} = I_{33} = 2ma^2/5$
薄球壳(半径为 a)	同上	$I_{11} = I_{22} = I_{33} = 2ma^2/3$
实椭球体(半轴为 a、b、c)	Ox、Oy、Oz 轴依次沿半轴 a、b、c	$I_{11} = m(b^2+c^2)/5$ $I_{22} = m(c^2+a^2)/5$ $I_{33} = m(a^2+b^2)/5$
圆锥(高 h，底面半径 a)	Ox、Oy 在底面上，Oz 轴为其轴线(质心不在坐标原点)	$I_{11} = I_{22} = m(3a^2+2h^2)/20$ $I_{33} = 3ma^2/10$

表4.1给出一些对称性比较高的均匀刚体绕过质心的对称轴的转动惯量.它们都可以利用(5.3)式直接积分得到.

刚体的平面平行运动可以看成是质心的运动(平动)和经过质心的定轴转动两种运动的合成.刚体平面平行运动的动力学方程,既可以由质心运动定理、角动量定理或能量定理来得出,也可以由拉格朗日方程来得出.但是有两点需要特别注意:

(1) 在§1.5中我们证明对于动点P,角动量定理的形式为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_P}{\mathrm{d}t} = -\boldsymbol{v}_P \times m\boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{M}_P,$$

因此如果我们限定角动量定理的形式为$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}$,则一般情况下它只对质心$C$才成立,这时$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_C$,因而$-\boldsymbol{v}_P \times m\boldsymbol{v}_C = 0$,对于其他动点一般不成立,除非此动点的速度和质心$C$的速度在运动过程中永远相互平行.

(2) 刚体作平面平行运动时,如果没有其他约束,自由度是3,可取x_C、y_C和ψ为广义坐标.如果刚体还受有其他约束,则自由度要减少到2或1,这时就要在x_C、y_C和ψ这三个坐标中选定2个或1个作为广义坐标,写拉格朗日函数时,不能把x_C、y_C和ψ三者同时保留下来.

下面我们举一些例题来说明刚体的平面平行运动的解题方法及应注意的问题.

【例1】 均匀圆柱体沿固定斜面滚下,求圆柱体的加速度和约束反作用力.

解:设圆柱体的半径为R,质量为m,斜面的倾角为α,取如图4.18所示的坐标系,则

$$y_C = 0. \tag{1}$$

如果圆柱只滚不滑,则

$$x_C = R\psi. \tag{2}$$

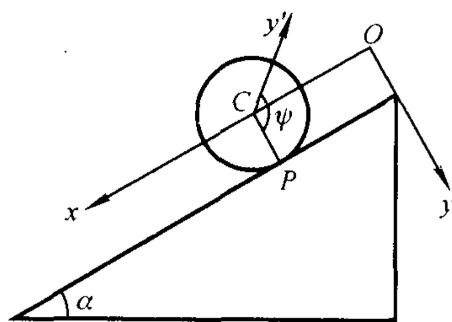


图4.18

(1)、(2)两式是两个理想约束条件,因此体系的自由度为1,主动力为重力,是保守力.因而如果不需要求P点的约束反作用力,则用拉格朗日方程或直接用能量守恒定律求解是很方便的.如还需要求约束反作用力,则可用质心运动定律和角动量定理来求解.

体系的动能

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_C^2 + \frac{1}{2}I_C\dot{\psi}^2.$$

将约束条件(2)代入上式,得

$$T = \frac{1}{2}m\left(1 + \frac{I_C}{mR^2}\right)\dot{x}_C^2. \tag{3}$$

体系的势能

$$V = -mgx_C\sin\alpha. \tag{4}$$

体系拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2}m\left(1+\frac{I_C}{mR^2}\right)\dot{x}_C^2 + mgx_C\sin\alpha. \tag{5}$$

把(5)式代入拉格朗日方程得

$$\left(1+\frac{I_C}{mR^2}\right)\ddot{x}_C - g\sin\alpha = 0. \tag{6}$$

对于实心圆柱体，$I_C = mR^2/2$，于是由(6)式可得

$$\ddot{x}_C = \frac{2}{3}g\sin\alpha. \tag{7}$$

可见圆柱是以等加速度沿斜面滚下的．由(7)式和(2)式，很容易求得 x_C、$\dot{x}_C$ 和 ψ、$\dot{\psi}$，这里不再一一写出．

如果用能量守恒定律来解，则由(3)、(4)两式得

$$\frac{1}{2}m\left(1+\frac{I_C}{mR^2}\right)\dot{x}_C^2 - mgx_C\sin\alpha = E = 常数. \tag{8}$$

上式对 t 求微商即得(6)式，和用拉格朗日方程得出的结果完全一样．

我们也可以用角动量定理来解这个问题．本题瞬时中心 P 的速度恒和质心 C 的速度平行，因此既可以对 C 点，也可以对 P 点应用角动量定理．对 P 点应用角动量定理，得

$$I_P\ddot{\psi} = mgR\sin\alpha. \tag{9}$$

将 $I_P = I_C + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$ 及 $\psi = \frac{x_C}{R}$代入，即得(7)式．

下面来求约束反作用力．圆柱和斜面的接触点 P 作用着的约束反作用力可分解为法向力 $\boldsymbol{F}_N$ 和切向力 $\boldsymbol{F}$，后者就是摩擦力(见图 4.19)．根据质心运动定理和对质心的角动量定理可得

$$m\ddot{x}_C = mg\sin\alpha - F, \tag{10}$$

$$0 = mg\cos\alpha - F_N, \tag{11}$$

$$I_C\ddot{\psi} = RF, \tag{12}$$

这三个方程加上约束方程(2)共 4 个方程，可解 x_C、ψ、F_N、F 四个未知函数．由(11)式得

$$F_N = mg\cos\alpha. \tag{13}$$

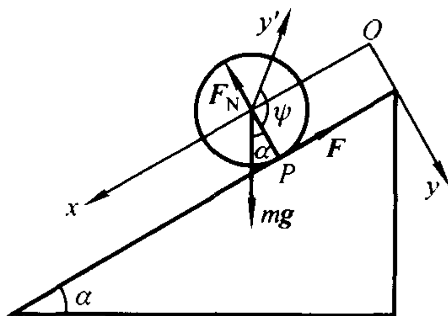


图 4.19

由(12)、(10)和(2)三式中消去 $\ddot{x}_C$ 和 $\ddot{\psi}$，或者直接将(7)代入(10)式得

$$F = \frac{1}{3}mg\sin\alpha. \tag{14}$$

以上我们讨论的是圆柱体在斜面上只滚不滑的情况，如果保持斜面粗糙程度不变，而将斜面的倾角 α 增大，则当 α 增加到某一值时，接触点 P 就要产生滑动，此时摩擦力 F 将从静摩擦力变为滑动摩擦力，存在关系式

$$F = \mu F_N. \tag{15}$$

将(12)和(14)代入(15)式，可知圆柱在斜面上只滚不滑的条件为

$$\mu \geqslant \frac{1}{3}\tan\alpha. \tag{16}$$

【例 2】 半径为 R 的偏心圆盘在水平面上作平面平行运动，圆盘的质量为 m，质心 C 离几何中心 O 的距离为 d，写出圆盘的运动方程．设圆盘只滚不滑．

解：取 $t=0$ 时，圆盘的几何中心为 Oxy 系的坐标原点，x 轴沿水平方向，y 轴沿铅直方向，质心 C 和几何中心 O 的连线与铅直线的夹角为 ψ，圆盘和水平面的接触点为 P，并令 $CP=r$．

(1) 应用拉格朗日方程．体系自由度为 1，选取 ψ 为广义坐标，质心坐标 x_C、y_C 可通过约束关系用 ψ 来表示：

$$x_C = -R\psi + d\sin\psi, \tag{1}$$

$$y_C = -d\cos\psi. \tag{2}$$

体系的动能和势能分别为

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\dot{\psi}^2 = \frac{1}{2}m(r\dot{\psi})^2 + \frac{1}{2}m\rho_C^2\dot{\psi}^2$$

$$= \frac{m}{2}[R^2 + d^2 + \rho_C^2 - 2dR\cos\psi]\dot{\psi}^2,$$

$$V = -mgd\cos\psi.$$

于是由拉格朗日方程得

$$(R^2 + d^2 + \rho_C^2 - 2dR\cos\psi)\ddot{\psi} + dR\sin\psi\,\dot{\psi}^2 + dg\sin\psi = 0, \tag{3}$$

此即圆盘的运动方程．

(2) 应用质心运动定理和角动量定理，有

$$m\ddot{x}_C = F, \tag{4}$$

$$m\ddot{y}_C = F_N - mg, \tag{5}$$

$$I_C\ddot{\psi} = -dF_N\sin\psi + (R - d\cos\psi)F. \tag{6}$$

在得出方程(6)时，我们利用了(见图 4.20)

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_N = -rF_N\sin\theta\boldsymbol{k} = -dF_N\sin\psi\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} = F(R - d\cos\psi)\boldsymbol{k}.$$

将(1)、(2)代入(4)、(5)得

$$F = m(-R\ddot{\psi} + d\cos\psi\,\ddot{\psi} - d\sin\psi\,\dot{\psi}^2), \tag{7}$$

$$F_N = m(d\sin\psi\,\ddot{\psi} + d\cos\psi\,\dot{\psi}^2) + mg. \tag{8}$$

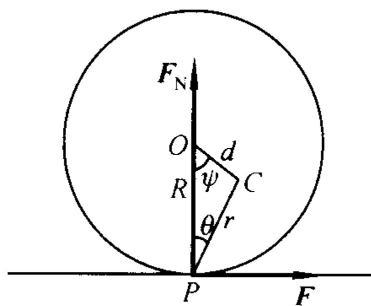


图 4.20

将(7)、(8)代入(6)，经过整理即得(3)式，和拉格朗日方程得出的结果一样．

(3) 利用守恒定律．本题体系机械能守恒，自由度为 1，因此由机械能守恒定律也可得圆盘的运动方程：

$$\frac{1}{2}m(R^2 + d^2 + \rho_C^2 - 2dR\cos\psi)\,\dot{\psi}^2 - mgd\cos\psi = \text{常数}. \tag{9}$$

上式对 t 微商即可得到(3)式．

本题瞬时中心 P 点和几何中心 O 的速度都不恒和质心 C 的速度平行，因此不能像例 1 那样对 P 点应用角动量定理，也不能对 O 点应用角动量定理．对 P 点应用角动量定理得：

$$2dR\sin\psi\,\dot{\psi}^2 + (R^2 + d^2 + \rho_C^2 - 2dR\cos\psi)\ddot{\psi} + dg\sin\psi = 0,$$

对 O 点应用角动量定理得

$$dR\sin\psi\dot{\psi}^2+(R^2+d^2+\rho_C^2-dR\cos\psi)\ddot{\psi}+dg\sin\psi=0,$$

它们都和(3)式不一样,都是错误的.

【例 3】 质量为 m 的乒乓球以初速 v_0 向右沿水平面抛出,同时球具有逆时针方向的初角速度 ω_0,讨论乒乓球以后的运动情况.

解: 在所给的初条件下乒乓球和水平面之间存在滑动摩擦. 如图 4.21 所示,设球和平面的接触点为 P 点,则球在 P 点受到的力,除了法向反作用力 F_N 外,还有切向摩擦力 F. 取球心 C 为基点,则 P 点的速度为

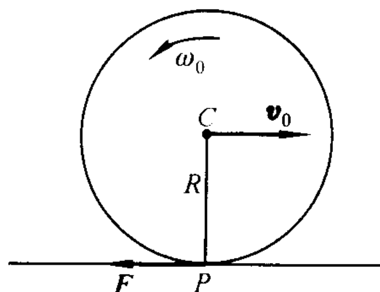


图 4.21

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_P&=\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{CP}\\&=(\dot{x}_C+R\dot{\psi})\boldsymbol{e},\end{aligned}\tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{e}$ 表示沿水平面向右的单位矢量. 滑动摩擦力的方向恒和接触点的相对速度的方向相反,因此由(1)知摩擦力 $\boldsymbol{F}$ 的方向向左,即

$$\boldsymbol{F}=-F\boldsymbol{e}.\tag{2}$$

先来建立球的运动方程. 迄今为止我们都局限于保守系统下应用拉格朗日方程来建立体系的运动方程. 本题乒乓球受到滑动摩擦力的作用,体系不是保守的. 我们结合这个例题来讨论如何应用拉格朗日方程来建立非保守系的运动微分方程.

约束在平面上的球既有转动又有滑动,体系的自由度为 2,我们取球心 C 的坐标 x_C 和转过的角度 ψ 为广义坐标. 非保守体系的拉格朗日方程应采用

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha\tag{3}$$

的形式,其中 $Q_\alpha=\sum_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\cdot\boldsymbol{F}_i$. 利用(1)式可得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_P=(\mathrm{d}x_C+R\mathrm{d}\psi)\boldsymbol{e},$$

所以

$$Q_1=\frac{\partial\boldsymbol{r}_P}{\partial x_C}\cdot(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_N)+\frac{\partial\boldsymbol{r}_C}{\partial x_C}\cdot m\boldsymbol{g}=-F,\tag{4}$$

$$Q_2=\frac{\partial\boldsymbol{r}_P}{\partial\psi}\cdot(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_N)+\frac{\partial\boldsymbol{r}_C}{\partial\psi}\cdot m\boldsymbol{g}=-RF.\tag{5}$$

体系的动能为

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}_C^2+\frac{1}{2}I_C\dot{\psi}^2.\tag{6}$$

将(4)、(5)、(6)代入(3)得

$$m\ddot{x}_C=-F,\tag{7}$$

$$I_C\ddot{\psi}=-RF.\tag{8}$$

(7)、(8)两式就是乒乓球的运动微分方程,其中滑动摩擦力 F 需要作为已知的主动力来看待. 在存在耗散力的情况下,体系的运动已不是一个纯力学问题,F 需要由实验定律来给出,这就是

$$F=\mu F_N=\mu mg,\tag{9}$$

滑动摩擦因数 μ 由实验给出. (7)、(8)、(9)构成一组完整的方程,解这组方程即可得到乒乓球的运动情况.

如果我们不用拉格朗日方程,而用质心运动定理和角动量定理,则可立即得出(7)、(8)两个方程,比用拉格朗日方程要方便得多.

下面讨论乒乓球的运动情况. 将(9)代入(7)、(8),经过一次积分得到

$$\omega = \dot{\psi} = -\frac{\mu mg}{I_C}Rt + \omega_0 = -\frac{3\mu g}{2R}t + \omega_0, \tag{10}$$

$$v_C = \dot{x}_C = -\mu gt + v_0. \tag{11}$$

从这两个式子中可知,乒乓球的角速度 ω 和球心的运动速度 v_C 都要逐渐减小. 设 $t = t_1$ 时, ω 减小到零; $t = t_2$ 时, v_C 减小到零. 由(10)和(11)式可求得 t_1 和 t_2 的值为:

$$t_1 = \frac{2R\omega_0}{3\mu g}, \tag{12}$$

$$t_2 = \frac{v_0}{\mu g}. \tag{13}$$

根据初始条件,乒乓球的运动最后可能出现三种不同情况:

(1) 若 $t_1 = t_2$,即 $2R\omega_0 = 3v_0$,则经过时刻 t_1 后,乒乓球就停止不动了.

(2) 若 $t_1 < t_2$,即 $2R\omega_0 < 3v_0$,则经过时刻 t_1 后, $\omega = 0$,而 $v_C = -\mu g \cdot \frac{2R\omega_0}{3\mu g} + v_0 = v_0 - \frac{2}{3}R\omega_0 > 0$,这时整个球各点的速度均为 v_C,接触点 P 的速度亦为 v_C,因此摩擦力 F 仍然向左,在此摩擦力的作用下,乒乓球将从原来的逆时针转动变为顺时针转动. 这时(10)和(11)式失效,而应代之以

$$\omega = \frac{3\mu}{2R}gt, \tag{14}$$

$$v_C = -\mu gt + \left(v_0 - \frac{2}{3}R\omega_0\right). \tag{15}$$

这就是说 ω 将从零逐渐增加,而 v_0 则从 $v_0 - \frac{2}{3}R\omega_0$ 继续减小,再经过时间 t 后, $v_C = R\omega$,这时乒乓球作纯滚动,摩擦力 F 消失,乒乓球将以等速向前继续滚动. t 可由(14)和(15)式联立决定:

$$\frac{3}{2}\mu gt = -\mu gt + \left(v_0 - \frac{2}{3}R\omega_0\right).$$

所以

$$t = \frac{2}{5\mu g}\left(v_0 - \frac{2}{3}R\omega_0\right). \tag{16}$$

此时球心的速度为

$$v_F = -\frac{2}{5}\left(v_0 - \frac{2}{3}R\omega_0\right) + \left(v_0 - \frac{2}{3}R\omega_0\right) = \frac{3}{5}v_0 - \frac{2}{5}R\omega_0, \tag{17}$$

所以在 $2R\omega_0 < 3v_0$ 的情况下,乒乓球从抛出后经过时间

$$t_1 + t = \frac{2R\omega_0}{3\mu g} + \frac{2}{5\mu g}\left(v_0 - \frac{2}{3}R\omega_0\right) = \frac{2}{5\mu g}(v_0 + R\omega_0) \tag{18}$$

后，将以等速 v_F 继续向前滚动.

(3) 若 $t_2 < t_1$，即 $2R\omega_0 > 3v_0$，则经过时刻 t_2 后，$v_C = 0$，而 $\omega = -\frac{3\mu g}{2R}\cdot\frac{v_0}{\mu g} + \omega_0 = \omega_0 - \frac{3v_0}{2R} > 0$，这时球心的速度为零，但球仍有逆时针方向的角速度存在，于是 v_C 改变方向，从原来向右运动变为向左滚回去，(10)和(11)两式失效，应代之以

$$\omega = -\frac{3\mu g}{2R}t + \left(\omega_0 - \frac{3v_0}{2R}\right), \tag{19}$$

$$v_C = \mu g t. \tag{20}$$

再经过时刻 t' 后，$v_C = R\omega$，此后乒乓球以等速继续向左一直滚下去. 由(19)和(20)可决定 t' 的值为

$$t' = \frac{1}{5\mu g}(2R\omega_0 - 3v_0). \tag{21}$$

此时球心的速度为

$$v_F = \mu g t' = \frac{1}{5}(2R\omega_0 - 3v_0). \tag{22}$$

经过的总时间为

$$\begin{aligned} t_2 + t' &= \frac{v_0}{\mu g} + \frac{1}{5\mu g}(2R\omega_0 - 3v_0) \\ &= \frac{2}{5\mu g}(v_0 + 2\omega_0) = t_1 + t. \end{aligned} \tag{23}$$

总结以上三种情况，可以得到一个统一的表达式：乒乓球从抛出时刻起，经过时间 $t = \frac{2}{5\mu g}(v_0 + R\omega_0)$ 后，将以等速 $v_F = \frac{1}{5}(3v_0 - 2R\omega_0)$ 作惯性运动.

现在我们附带讲一下滚动摩擦的问题. 上面我们所讨论的问题，都把实际物体(轮子、斜面等)看成是刚体，两个刚体相互接触时不会发生形变. 实际上两个被看成是刚体的物体在互相接触时，多少要发生形变. 以轮子在水平直线轨道上的滚动为例，为简单起见，设轮子发生了一些形变，而轨道不发生形变，如图 4.22 所示. 图 4.23 是相应的理想刚体的情况. 轮子受到水平方向主动力 F 的作用，力的作用点与轨道的距离为 h. 将轨道对轮子的作用力分解为法向力 F_N 和切向力 F_f 两个分量，F_f 就是摩擦力，F_N 为轮子的重量 mg. 在两种情况下法向力 F_N 的作用点有所不同. 在图 4.23 的情况，F_N 通过轮心 O，在图 4.22 的情况下，当存在主动力 F 时，F_N 将偏离一个水平距离 l，从图中可以看出，要使轮子从静止状态开始滚动，必须 $Fh \geqslant F_N l$，即要求

$$F \geqslant \frac{l}{h}F_N = kF_N.$$

我们称 $k = \frac{l}{h}$ 为**滚动摩擦因数**. 而轮子发生滑动时必须具备的条件为

$$F \geqslant \mu F_N.$$

μ 为**动摩擦因数**或**静摩擦因数**. 实验表明 k 约比 μ 小一个数量级,这就是为什么以滚动代替滑动可以省力的原因. 需要特别注意的是,理想刚体只滚不滑时,所受到的摩擦力是静摩擦力,不要和这里所说的滚动摩擦混淆起来.

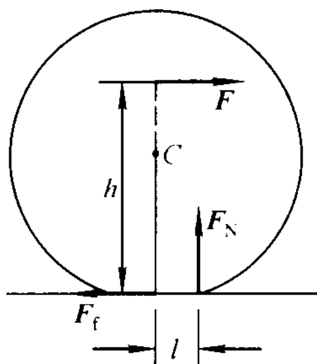


图 4.22

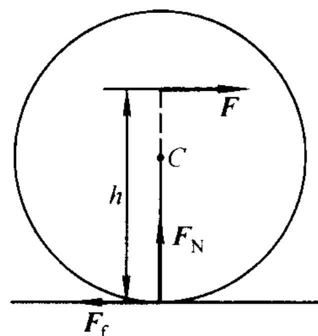


图 4.23

§4.6 转动惯量张量 欧拉动力学方程

讨论刚体定点转动的动力学问题,首先要建立相应的动力学方程. 取 3 个欧拉角为定点转动的广义坐标. 根据 §4.4 的讨论,只要将刚体的角动量 $\boldsymbol{L}$ 和动能 T 用欧拉角及其对时间的微商来表示,代入 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{M}$(力矩)或 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0$(此式中 L 为拉格朗日函数,不是角动量.),即可求得定点转动的动力学方程. 角动量 $\boldsymbol{L}$ 和动能 T 的表示式(4.6)和(4.8)都是矢量形式,为了把它们写成欧拉角的函数,我们要把(4.6)式写成标量形式,这就要选定一个具体的坐标系. 我们曾引进了两个坐标系:固定在空间的 $Ox_0y_0z_0$ 系和固定在刚体上的 $Cxyz$ 系. 对于定点转动,这两个坐标系的原点可选取在同一点 O. 考虑到写出 $\boldsymbol{L}$ 和 T 的目的是为了代入角动量定理或拉格朗日方程,两者都需要对时间 t 微商. 如果采用 $Ox_0y_0z_0$ 系,则(4.5)式中的 $\boldsymbol{r}_i$ 的三个分量 x_i、y_i 和 z_i 都是随时间变化的,这种变化规律是未知的,它们正是我们需要通过解动力学方程来寻求的东西. 如果采用 $Oxyz$ 系,由于它是固定在刚体上的,因此 $\boldsymbol{r}_i$ 是一个常模矢量,它对时间的微商就是第 i 个质点的速度:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i,$$

式中 $\boldsymbol{\omega}$ 就是刚体的角速度,可用欧拉角表示. 所以应该采用这个坐标系. 下面我们就将(4.6)式在 $Oxyz$ 系展开,写成分量形式:

$$L = \sum_i m_i \{[\omega_x(y_i^2 + z_i^2) - \omega_y x_i y_i - \omega_z x_i z_i]\boldsymbol{i} + [-\omega_x y_i x_i + \omega_y(z_i^2 + x_i^2) - \omega_z y_i z_i]\boldsymbol{j} + [-\omega_x z_i x_i - \omega_y z_i y_i + \omega_z(x_i^2 + y_i^2)]\boldsymbol{k}\}. \tag{6.1}$$

上式求和号下的 ω_x、ω_y 和 ω_z 与求和指标 i 无关,因此可以移到求和号的外面来.如果引用符号(为书写简化起见,略去求和指标 i):

$$\begin{cases} I_{11} = \sum m(y^2 + z^2), \\ I_{12} = \sum mxy, \\ I_{13} = \sum mxz, \\ I_{21} = \sum myx, \\ I_{22} = \sum m(z^2 + x^2), \\ I_{23} = \sum myz, \\ I_{31} = \sum mzx, \\ I_{32} = \sum mzy, \\ I_{33} = \sum m(x^2 + y^2), \end{cases} \tag{6.2}$$

则(6.1)可写成

$$\begin{cases} L_x = I_{11}\omega_x - I_{12}\omega_y - I_{13}\omega_z, \\ L_y = -I_{21}\omega_x + I_{22}\omega_y - I_{23}\omega_z, \\ L_z = -I_{31}\omega_x - I_{32}\omega_y + I_{33}\omega_z. \end{cases} \tag{6.3}$$

如果将 x、y、z 改用 x_1、x_2、x_3 表示,则(6.2)中的 9 个式子可统一表示为

$$I_{kl} = \sum m[(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\delta_{kl} + (-1)^{\delta_{kl}} x_k x_l], \quad (k、l = 1,2,3). \tag{6.4}$$

式中

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 0, & k \neq l. \end{cases} \tag{6.5}$$

(6.3)式还可以写成矩阵的形式

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{21} & I_{22} & -I_{23} \\ -I_{31} & -I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}. \tag{6.6}$$

矩阵 $\boldsymbol{I}$ 有 9 个元素,(6.4)就是它的矩阵元的一般表示式.由 $I_{kl} = I_{lk}$,知 $\boldsymbol{I}$ 是一

个对称矩阵,因此独立的元素只有 6 个,其中对角元素 I_{11}、I_{22}、I_{33}分别是刚体绕 x 轴、y 轴、z 轴的转动惯量,元素 I_{12}、I_{23}、I_{31}称为**惯量积**,$\boldsymbol{I}$ 称为**惯量矩阵**或**惯量张量**.

从上面的讨论中我们看到,刚体定点转动时角动量 $\boldsymbol{L}$ 和角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的关系,一般情况下是比较复杂的. 是否有可能把 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 的这种关系化得更简单一些呢? 下面我们来分析这个问题.

从(6.2)中我们看到,I_{ik}的 6 个独立分量中,三个对角分量 I_{11}、I_{22}和 I_{33}是对坐标的平方求和,因此是恒正的,但是三个非对角的分量

$$I_{jk}=\sum m x_j x_k \quad (j\neq k)$$

则可正可负,也可能为零. 例如:对于半径为 r,高为 h 的均匀圆柱体,如取对称轴为 z 轴,则 $I_{12}=I_{23}=I_{31}=0$. 但如果不是取对称轴为一个坐标轴,则上述三个惯量积将不为零(计算从略). 因此可以通过适当选取坐标轴的方向,使惯量张量 I_{ik}中的三个惯量积都为零,从而使惯量矩阵是一个对角矩阵,于是 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 的关系将大大简化,定点转动的动力学方程也就简单得多了.

能使惯量张量的三个惯量积都为零的坐标轴称为**刚体的主轴**,或**惯量主轴**. 寻求惯量主轴的一般方法我们将在以后再作讨论. 实用上可简单地利用刚体的对称性来确定惯量主轴,如图 4.24 所示,设 x 轴是刚体的对称轴,那么对于此刚体上的任一个质点 $M(x,y,z)$,必有另一个质点 $M'(x,-y,-z)$与之对应,因此

$$\sum mxy=0,$$
$$\sum mxz=0,$$

即 x 轴是惯量主轴,所以均匀刚体的对称轴必为惯量主轴. 同理,如果刚体有对称面 Oxy 平面,则对于任一点 $M(x,y,z)$,必有另一点 $M''(x,y,-z)$与之相对应,因此

$$\sum mzx=0,\sum mzy=0,$$

即 z 轴为惯量主轴,它是和对称面 Oxy 平面垂直的. 所以垂直于均匀刚体对称面的轴线也一定是惯量主轴.

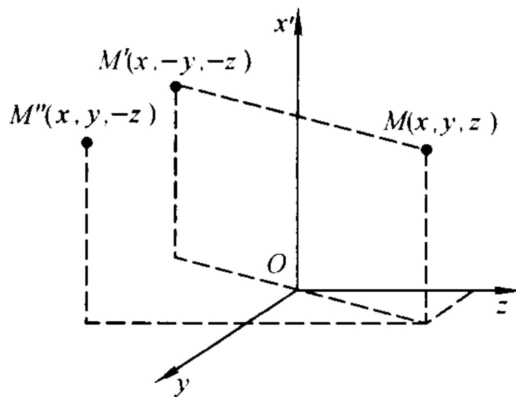


图 4.24

利用对称性寻找惯量主轴,对于规则的均匀刚体是极为方便的,§4.5 中所给出的转动惯量都是针对惯量主轴给出的. 但对于非对称性刚体,或虽有几何对称性,但质量分布不均匀的刚体,则无法通过对称性的办法来确定惯量主轴. 但惯量主轴还是存在的,这时必须用一般的方法来寻找.

以质心为坐标原点的惯量主轴称为**中心惯量主轴**. 可以证明在中心惯量主轴延线上取平行坐标系,新的坐标系仍是惯量主轴. 证明如下:

如图 4.25 所示,设 C 为刚体质心,$Cxyz$ 的三个坐标轴为刚体三个惯量主轴. 根据惯量主轴的定义,有

$$\sum mxy = 0, \sum mxz = 0, \sum myz = 0.$$

现在取一个新的坐标系 $Ox'y'z'$,坐标原点在 $Cxyz$ 系的 z 轴延线上,$CO = a$,x' 和 y' 轴和原来的坐标轴平行,这两个坐标系之间的关系为:

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = y, \\ z' = z + a. \end{cases}$$

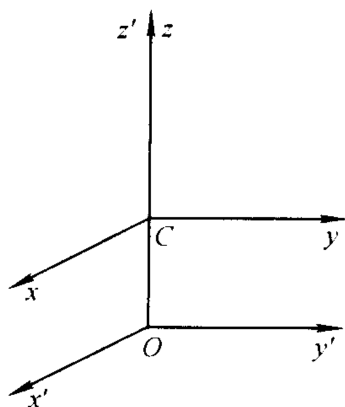


图 4.25

下面我们在新的坐标系中计算刚体的三个惯量积. 利用上面的关系式得

$$\begin{cases} \sum mx'y' = \sum mxy = 0, \\ \sum mx'z' = \sum mx(z+a) = a\sum mx = ax_C \sum m = 0, \\ \sum my'z' = \sum my(z+a) = a\sum my = ay_C \sum m = 0. \end{cases}$$

这就证明了三个新的坐标轴 x'、y'、z' 仍是惯量主轴.

从这个例子可以看到,如果原来的三个惯量主轴是刚体的三个对称轴,经过上述平移后,x' 和 y' 轴一般不再是刚体的对称轴,但它们仍然是惯量主轴. 因此刚体的对称轴一定是惯量主轴,但惯量主轴不一定是对称轴,即使对于均匀的有规则的刚体也是如此.

作了上面这些讨论后,以后恒认为我们所选取的固定在刚体上的三个坐标轴是惯量主轴. 从而可将刚体的角动量 $\boldsymbol{L}$ 简单地表示为

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \tag{6.7}$$

或

$$\boldsymbol{L} = I_1\omega_x\boldsymbol{i} + I_2\omega_y\boldsymbol{j} + I_3\omega_z\boldsymbol{k}, \tag{6.8}$$

而刚体的动能 T 可表示为

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(I_1\omega_x^2 + I_2\omega_y^2 + I_3\omega_z^2). \tag{6.9}$$

为书写简单起见,我们已将前面的 I_{11}、I_{22}、I_{33} 分别用 I_1、I_2、I_3 来表示了.

将(6.8)代入 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}$,并考虑到

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{i} = \omega_z \boldsymbol{j} - \omega_y \boldsymbol{k}, \\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{j} = \omega_x \boldsymbol{k} - \omega_z \boldsymbol{i}, \\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{k} = \omega_y \boldsymbol{i} - \omega_x \boldsymbol{j}, \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_x - (I_2 - I_3)\omega_y\omega_z = M_x, \\ I_2 \dot{\omega}_y - (I_3 - I_1)\omega_z\omega_x = M_y, \\ I_3 \dot{\omega}_z - (I_1 - I_2)\omega_x\omega_y = M_z. \end{cases} \tag{6.10}$$

上式称为**欧拉动力学方程**，将它和欧拉运动学方程(2.8)联立起来，从中消去 ω_x、ω_y、ω_z，就可得到 3 个对欧拉角 φ、θ、ψ 为二阶的非线性常微分方程，它们就是刚体定点转动动力学方程的具体形式.

* §4.7 惯量椭球

在上面两节中，我们就平面平行运动和定点转动两种不同情况，讨论了刚体转动时角动量和动能的积分中 $\boldsymbol{L} = \sum_i m_i[r_i^2\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}_i)\boldsymbol{r}_i]$ 的表示式. 在平面平行运动中，转动惯量 I 是一个标量，而在刚体定点转动中，转动惯量是一个张量. 从刚体转动的性质来说，定轴转动是定点转动的一种特殊情况. 因此，如果已知刚体绕一定点的转动惯量张量 I_{kl}，那么刚体绕过此定点的任意一个方向 $\boldsymbol{e}$ 的定轴的转动惯量 I_e，一定可由 I_{kl} 和 $\boldsymbol{e}$ 得出. 下面我们就来导出这个关系式.

如图 4.26 所示，设 $Oxyz$ 为固定在刚体上的一个坐标系，$\boldsymbol{e}$ 为过点 O 的任意一个转动轴的单位矢量，它的方向余弦为 α、β、γ，

$$\boldsymbol{e} = \alpha\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j} + \gamma\boldsymbol{k}. \tag{7.1}$$

$M(x,y,z)$为刚体中的任意一点，它的位置矢量为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}. \tag{7.2}$$

M 点到转动轴的垂直距离 R 为

$$R = r\sin\theta = r\sqrt{1-\cos^2\theta}, \tag{7.3}$$

式中 θ 为 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 的夹角，它可由下式决定

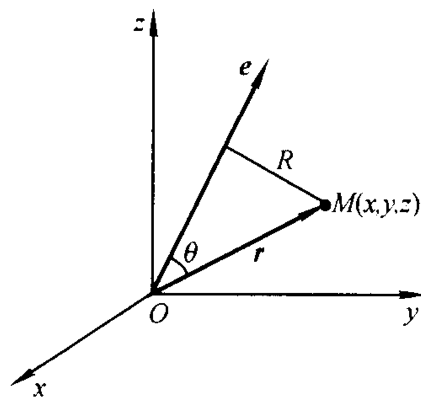


图 4.26

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e} = r\cos\theta = \alpha x + \beta y + \gamma z,$$

即

$$\cos\theta = \frac{(\alpha x + \beta y + \gamma z)}{r}, \tag{7.4}$$

根据定义,刚体绕 e 方向作定轴转动时,它的转动惯量为 $I_e = \sum mR^2$. 将(7.3)和(7.4)代入,得

$$I_e = \sum m[(x^2+y^2+z^2) - (\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2+2\alpha\beta xy+2\alpha\gamma xz+2\beta\gamma yz)].$$

利用 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ 和转动惯量张量的定义(6.2),上式可表示为

$$I_e = I_{11}\alpha^2 + I_{22}\beta^2 + I_{33}\gamma^2 + 2I_{12}\alpha\beta + 2I_{13}\alpha\gamma + 2I_{23}\beta\gamma. \tag{7.5}$$

如果我们所取的坐标正好是惯量主轴,则三个惯量积为零. 上式就简化为

$$I_e = I_{11}\alpha^2 + I_{22}\beta^2 + I_{33}\gamma^2, \tag{7.6}$$

这就是我们所要给出的关系式. 它表明,对于一个确定的刚体,只要定点转动惯量张量已知,即可方便地求出绕过此点的任意方向的轴的转动惯量.

下面我们来引入惯量椭球的概念. 这一概念在物理上有广泛的应用,不仅对转动惯量适用,而且对物理上其他类似的张量也适用,它可使得抽象的物理量变得形象具体.

根据图 4.26 和(7.5)式,如果在转动轴 e 方向上取一线段 $ON=\dfrac{1}{\sqrt{I_e}}$,则 N 点的坐标为

$$x = \frac{\alpha}{\sqrt{I_e}},\ y = \frac{\beta}{\sqrt{I_e}}, z = \frac{\gamma}{\sqrt{I_e}}. \tag{7.7}$$

用 I_e 除(7.5)式两端,并将上式代入得

$$I_{11}x^2 + I_{22}y^2 + I_{33}z^2 + 2I_{12}xy + 2I_{13}xz + 2I_{32}yz = 1. \tag{7.8}$$

这是一个以 O 点为原点的椭球方程,这个椭球称为**惯量椭球**. 惯量椭球有简单的几何意义:从坐标原点 O 沿任意方向作一轴线 e,它和椭球表面的交点为 N,则 ON 即为此刚体绕 e 方向的轴作定轴转动时的转动惯量 I_e 的平方根的倒数.

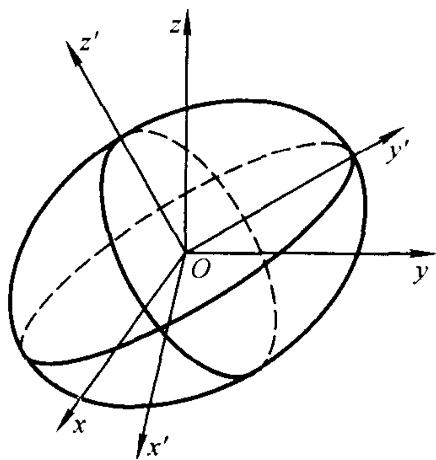


图 4.27

从解析几何中我们知道,每一个椭球都有三个互相垂直的主轴,如果取这三个主轴为新的坐标系 $Ox'y'z'$ 的坐标轴,则椭球方程(7.8)将变为

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1. \tag{7.9}$$

将它和(7.8)式比较,可知在新的坐标系中,此刚体的惯量张量的三个惯量积都是零,因此新坐标轴就是惯量主轴. 将椭球方程(7.8)化为标准形式(7.9)后就可以找到主轴方向,因此刚体的惯量主轴是一定可以找到的.

§4.8 刚体的自由转动

刚体的自由转动是指外力矩为零的运动,如分子的转动,地球的自转等,相应的刚体常称为**欧拉陀螺**.

刚体自由转动时外力矩为零,因此角动量守恒,角动量平方也守恒,即

$$L^2 = I_1^2\omega_x^2 + I_2^2\omega_y^2 + I_3^2\omega_z^2 = \text{常数}. \tag{8.1}$$

同时它的能量也守恒

$$E = \frac{1}{2}(I_1\omega_x^2 + I_2\omega_y^2 + I_3\omega_z^2) = \text{常数}. \tag{8.2}$$

由上面两式可解得

$$\begin{aligned}\omega_x &= \pm\sqrt{\frac{L^2 - 2EI_2 - I_3(I_3 - I_2)\omega_z^2}{I_1(I_1 - I_2)}} = f_1(\omega_z),\\ \omega_y &= \pm\sqrt{\frac{L^2 - 2EI_1 - I_3(I_3 - I_1)\omega_z^2}{I_2(I_2 - I_1)}} = f_2(\omega_z).\end{aligned} \tag{8.3}$$

将(8.3)代入欧拉动力学方程中的第三个方程,得

$$I_3\dot{\omega}_z - (I_1 - I_2)f_1(\omega_z)f_2(\omega_z) = 0.$$

由此可得

$$\frac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}t} = \frac{I_1 - I_2}{I_3}f_1(\omega_z)f_2(\omega_z). \tag{8.4}$$

由(8.4)式可解得 ω_z 为 t 的函数,再代入欧拉运动学方程,得到三个关于欧拉角 φ、θ、ψ 的一阶微分方程组,解这三个一阶方程即可得到刚体自由转动的运动情况. 这种方法运算相当复杂,而且很难从结果中形象地看出刚体的转动情况.

潘索(Poinsot)曾采用一种几何方法来讨论刚体的自由转动. 取刚体的质心为定点 O,取 O 点的惯量主轴为 $Oxyz$ 系的三个坐标轴,则惯量椭球的方程是

$$I_1x^2 + I_2y^2 + I_3z^2 = 1. \tag{8.5}$$

如上面所述,刚体自由转动时,角动量 $\boldsymbol{L}$ 的大小和方向是固定不变的,我们取它为 Oz' 轴方向. 而角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的大小和方向一般情况下是不断改变的. 如图 4.28 所示. 在具体说明刚体自由转动以前,首先证明图 4.28 中的两个几何关系:

(1) $\boldsymbol{\omega}$ 在 $\boldsymbol{L}$ 方向的投影 ω_L 是常数:

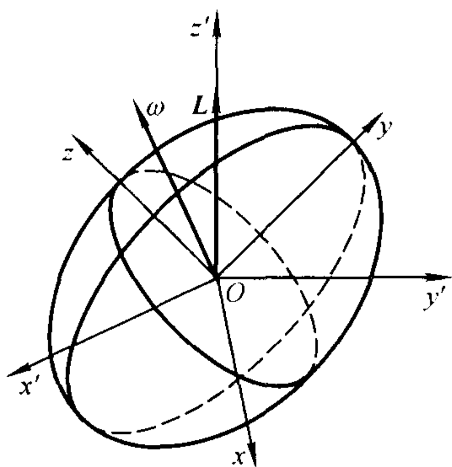


图 4.28

$$\omega_L = \omega \cdot \frac{\boldsymbol{L}}{L} =$$

$$\frac{1}{L}(I_1\omega_x^2 + I_2\omega_y^2 + I_3\omega_z^2) = \frac{2E}{L}. \tag{8.6}$$

(2) 设 $\boldsymbol{\omega}$ 矢量和惯量椭球的交点为 N，ON 的长度为 ρ，则

$$\boldsymbol{r}_{ON} = \rho\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega},$$

所以 N 点的坐标为

$$x = \rho\frac{\omega_x}{\omega}, y = \rho\frac{\omega_y}{\omega}, z = \rho\frac{\omega_z}{\omega}. \tag{8.7}$$

由于 N 点在惯量椭球面上，因此(8.7)式所给的坐标满足椭球方程. 将(8.7)式代入(8.5)式得

$$\frac{\rho^2}{\omega^2}(I_1\omega_x^2 + I_2\omega_y^2 + I_3\omega_z^2) = 1.$$

再将(8.2)代入上式即得

$$\rho = \frac{\omega}{\sqrt{2E}}. \tag{8.8}$$

因此 ON 的长度 ρ 和 ω 成正比.

其次我们来求过 N 点和惯量椭球相切的平面的方程. 如图 4.29 所示，设此平面的流动坐标为 x'、y'、z'，Q 为此平面上的任意一点：

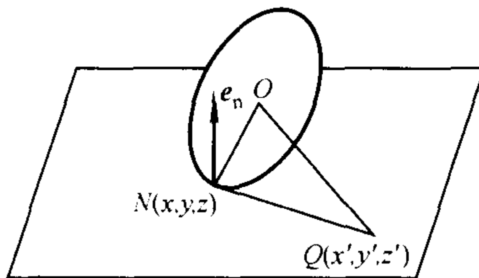


图 4.29

$$\boldsymbol{r}_{OQ} = x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j} + z'\boldsymbol{k},$$

而

$$\boldsymbol{r}_{ON} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

因此

$$\boldsymbol{r}_{NQ} = \boldsymbol{r}_{OQ} - \boldsymbol{r}_{ON} = (x' - x)\boldsymbol{i} + (y' - y)\boldsymbol{j} + (z' - z)\boldsymbol{k}.$$

$\boldsymbol{r}_{NQ}$ 必和此平面的法线 $\boldsymbol{e}_n$ 垂直. 由于此平面是惯量椭球在 P 点的切平面，因此它的法线方向就是(8.5)式的椭球方程 $\varphi(x、y、z)$ 的法线方向. 椭球的法线方向可以用 $\nabla\varphi(x、y、z)$ 来表示：

$$\nabla\varphi = I_1x\boldsymbol{i} + I_2y\boldsymbol{j} + I_3z\boldsymbol{k},$$

于是由 $\boldsymbol{r}_{NQ}\cdot\boldsymbol{e}_n = 0$ 得

$$I_1x(x' - x) + I_2y(y' - y) + I_3z(z' - z) = 0,$$

或

$$I_1 xx' + I_2 yy' + I_3 zz' = 1. \tag{8.9}$$

将(8.7)代入上式，并利用(8.8)式消去$\frac{\rho}{\omega}$，则(8.9)式可改写为

$$\frac{I_1 \omega_x}{L}x' + \frac{I_2 \omega_y}{L}y' + \frac{I_3 \omega_z}{L}z' - \frac{\sqrt{2E}}{L} = 0, \tag{8.10}$$

这就是惯量椭球在 N 点的切平面方程，其中

$$L = \sqrt{I_1^2 \omega_x^2 + I_2^2 \omega_y^2 + I_3^2 \omega_z^2}.$$

由解析几何知道，一法线的方向余弦为 α、β、γ，与坐标原点的距离为 δ 的平面的平面方程为：

$$\alpha x' + \beta y' + \gamma z' - \delta = 0.$$

将(8.10)式与它相比，可知所求的切平面方程的方向余弦为

$$\alpha = \frac{I_1 \omega_x}{L}, \beta = \frac{I_2 \omega_y}{L}, \gamma = \frac{I_3 \omega_z}{L}.$$

显然这就是角动量 $\boldsymbol{L}$ 的方向余弦，是不随刚体的运动而改变的．切平面距定点 O 的距离

$$\delta = \frac{\sqrt{2E}}{L}$$

也是不变的．因此惯量椭球在 N 点的切平面是一个不变的平面．

现在我们可以形象地对刚体的自由转动作出描述了．如图 4.30 所示，首先作刚体的中心惯量椭球，然后过质心 O 作角动量矢量 $\boldsymbol{L}$，并在此方向上取一点 O'，令

$$OO' = \delta = \frac{\sqrt{2E}}{L}.$$

过 O' 点作一和 $\boldsymbol{L}$ 垂直的平面 π，这个平面就是上面所述的不变平面，它必与中心惯量椭球相切于 N 点，$\boldsymbol{r}_{ON}$ 的方向即为角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向，亦即瞬时转轴的方向．刚体运动时，N 点位置将不断改变，但由于 N 点在瞬时转轴上，它的瞬时速度必为零，因此中心惯量椭球只能在不变平面 π 上作纯滚动．由于惯量主轴是固定在刚体上的，因此惯量椭球的运动就是刚体的运动．这就十分形象地给出了刚体自由转动的情况：中心惯量椭球在不变平面 π 上作纯滚动．

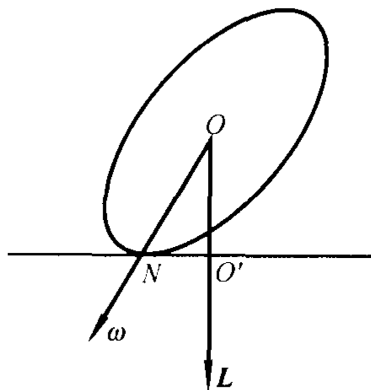


图 4.30

不论用欧拉的分析方法，还是用潘索的几何方法，最后求得刚体自由转动的解都是十分复杂的．但如果刚体具有对称性，$I_1 = I_2$，即为对称的欧拉陀螺，则计算就会大为简便．假定地球是一个扁平的均匀球体，不考虑太阳和月亮对地球的引力，则地球就是一个对称的欧拉陀螺．

由欧拉动力学方程(6.10),对称欧拉陀螺的运动方程为

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_x-(I_1-I_3)\omega_y\omega_z=0, \\ I_1\dot{\omega}_y-(I_3-I_1)\omega_z\omega_x=0, \\ I_3\dot{\omega}_z=0. \end{cases} \tag{8.11}$$

由上面的第 3 个方程得

$$\omega_z=\text{常数}. \tag{8.12}$$

上式表明,对称欧拉陀螺的角速度在对称轴上的投影是常数. 将(8.12)代入(8.11)中的前两式,得

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_x&=-\frac{I_3-I_1}{I_1}\omega_z\omega_y=-n\omega_y, \\ \dot{\omega}_y&=\frac{I_3-I_1}{I_1}\omega_z\omega_x=n\omega_x, \end{aligned} \tag{8.13}$$

式中

$$n=\frac{I_3-I_1}{I_1}\omega_z, \tag{8.14}$$

也是常数. 由(8.13)可得

$$\begin{cases} \ddot{\omega}_x=-n^2\omega_x, \\ \ddot{\omega}_y=-n^2\omega_y. \end{cases}$$

由这两个方程可解得

$$\begin{cases} \omega_x=\omega_0\cos(nt+\varepsilon), \\ \omega_y=\omega_0\sin(nt+\varepsilon), \end{cases} \tag{8.15}$$

式中 ω_0 和 ε 是两个积分常数. 由(8.12)和(8.15)得地球角速度的大小为

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2+\omega_z^2}=\text{常数}, \tag{8.16}$$

但它的方向则绕着对称轴 Oz 以等角速度 n 作转动. 所以 $\boldsymbol{\omega}$ 矢量的运动轨道为一圆锥面,Oz 为此圆锥面的轴线,如图 4.31 所示.

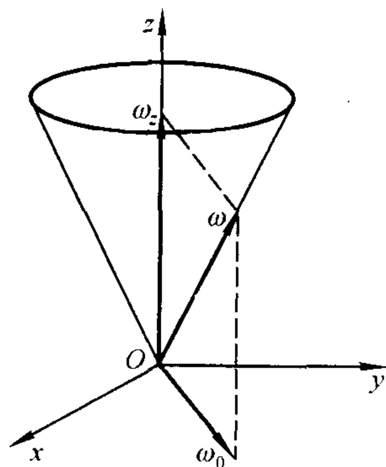


图 4.31

上面所讨论的是 ω 在固定在刚体的 $Oxyz$ 系中的运动情况,现在转到固定在空间的 $Ox_0y_0z_0$ 系中来讨论,以便找出三个欧拉角的运动规律. 首先要选定 $Ox_0y_0z_0$ 系的方向. 因为本题力矩 $\boldsymbol{M}=0$,因此 $\boldsymbol{L}=$ 常矢量,所以我们可取 $\boldsymbol{L}$ 的方向为 Oz_0 轴的方向,即令

$$\boldsymbol{L}=L\boldsymbol{e}_3=L(\sin\theta\sin\psi\boldsymbol{i}+\sin\theta\cos\psi\boldsymbol{j}+\cos\theta\boldsymbol{k}). \tag{8.17}$$

但由(8.12)和(8.15)式,$\boldsymbol{L}$ 又可表示为

$$\boldsymbol{L} = I_1\omega_0\cos(nt+\varepsilon)\boldsymbol{i} + I_1\omega_0\sin(nt+\varepsilon)\boldsymbol{j} + I_3\omega_z\boldsymbol{k}.$$

将它和(8.17)式比较,可得

$$\begin{cases} L\sin\theta\sin\psi = I_1\omega_0\cos(nt+\varepsilon), \\ L\sin\theta\cos\psi = I_1\omega_0\sin(nt+\varepsilon), \\ L\cos\theta = I_3\omega_z. \end{cases} \tag{8.18}$$

由上面的第三式得

$$\cos\theta = \frac{I_3\omega_z}{L} = 常数 = \cos\theta_0. \tag{8.19}$$

此式表明对称欧拉陀螺在转动过程中 θ 为常数,没有章动,只有自转和进动,称为**规则进动**.

将(8.19)代入(8.18)的第一式得

$$L\sin\theta_0\sin\psi = I_1\omega_0\cos(nt+\varepsilon).$$

要使此式恒成立,必须

$$L\sin\theta_0 = I_1\omega_0,\ \sin\psi = \cos(nt+\varepsilon).$$

由此可得

$$\psi = \frac{\pi}{2} - nt - \varepsilon.$$

于是

$$\dot{\psi} = -n = \frac{I_1 - I_3}{I_1}\omega_z. \tag{8.20}$$

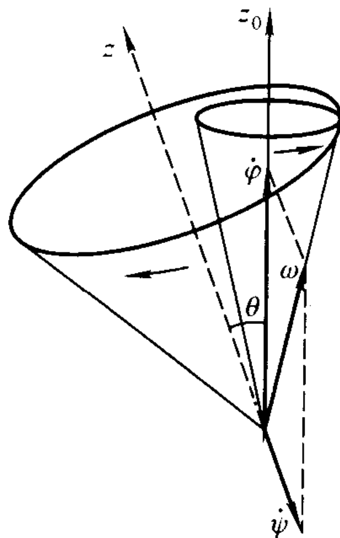


图 4.32

将(8.12)、(8.19)和(8.20)代入第三个欧拉运动学方程得

$$\dot{\varphi} = (\omega_z + n)\sec\theta_0 \tag{8.21}$$

(8.19)、(8.20)和(8.21)给出了三个欧拉角的运动情况,它们的几何关系如图4.32所示.

§4.9 拉格朗日陀螺

拉格朗日陀螺指的是刚体绕定点 O 转动时,其惯量椭球是一旋转椭球,$I_1 = I_2$,重心 C 在对称轴 Oz 上. 小孩玩的陀螺就是一种拉格朗日陀螺,其运动情况大家是比较熟悉的.

我们直接用拉格朗日方程来讨论这个问题. 如图 4.33 所示,设陀螺的质量为 m,质心 C 离定点 O 的距离为 l,则陀螺的势能为

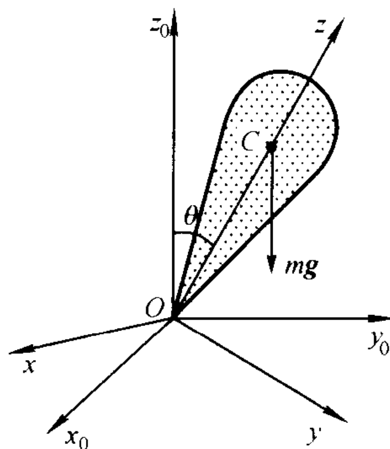


图 4.33

$$V = mgl\cos\theta,$$

陀螺的动能为

$$T = \frac{I_1}{2}(\omega_x^2 + \omega_y^2) + \frac{I_3}{2}\omega_z^2$$
$$= \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2.$$

因此陀螺的拉格朗日函数为：

$$L = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2 - mgl\cos\theta.$$

L 中不显含 φ 和 ψ，φ 和 ψ 是循环坐标，因此得到两个守恒量

$$P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = (I_1\sin^2\theta + I_3\cos^2\theta)\dot{\varphi} + I_3\cos\theta\dot{\psi} = 常数 = L_{e_3}, \tag{9.1}$$

$$P_\psi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}} = I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta) = 常数 = L_k. \tag{9.2}$$

P_φ 和 P_ψ 分别为陀螺的角动量 $\boldsymbol{L}$ 在进动方向 $\boldsymbol{e}_3$ 和自转方向 $\boldsymbol{k}$ 上的分量. 由于 $L_k = I_3\omega_z$，因此由(9.2)式可知 ω_z 也是守恒的. 此外，陀螺的能量也守恒：

$$\frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + \frac{L_k^2}{2I_3} + mgl\cos\theta = E = 常数. \tag{9.3}$$

(9.1)、(9.2)和(9.3)就是拉格朗日陀螺的三个动力学方程. 由(9.1)和(9.2)可得

$$\dot{\varphi} = \frac{L_{e_3} - L_k\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}, \tag{9.4}$$

$$\dot{\psi} = \frac{L_k}{I_3} - \frac{L_{e_3} - L_k\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}\cos\theta. \tag{9.5}$$

将它们代入(9.3)中得

$$E = \frac{I_1}{2}\left[\dot{\theta}^2 + \frac{(L_{e_3} - L_k\cos\theta)^2}{I_1^2\sin^2\theta}\right] + \frac{L_k^2}{2I_3} + mgl\cos\theta. \tag{9.6}$$

令

$$V_{\text{eff}}(\theta) = \frac{(L_{e_3} - L_k\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta} - mgl(1 - \cos\theta), \tag{9.7}$$

$$E' = E - \frac{L_k^2}{2I_3} - mgl, \tag{9.8}$$

则(9.6)式可改写为

$$\frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 + V_{\text{eff}}(\theta) = E'. \tag{9.9}$$

由(9.9)式可得

$$t = \int \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\frac{2}{I_1}[E' - V_{\text{eff}}(\theta)]}}. \tag{9.10}$$

将(9.10)代入(9.4)和(9.5)可将 φ 和 ψ 表示为 θ 的积分.

下面我们来讨论在陀螺的运动过程中 θ 的变化范围. 由(9.9)式可知 $E'\geqslant V_{\text{eff}}(\theta)$,等号仅当 $\dot{\theta}=0$ 时,即 θ 取极大值或极小值时成立. 因此 θ 的极大值和极小值由条件

$$E' = V_{\text{eff}}(\theta) \tag{9.11}$$

决定. 由(9.7)式可知,当 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi$ 时,$V_{\text{eff}}(\theta)$都趋向 $+\infty$,而当 $\cos\theta = L_{e_3}/L_k$ 时,$V_{\text{eff}}<0$. 因此 V_{eff}随 θ 变化的图形大致如图 4.34 所示,它和 $E'=$常数的直线有两个交点 θ_1 和 θ_2,这两个角度决定了陀螺的 z 轴对铅直方向偏转的章动角的界限. θ_1 和 θ_2 的具体数值可由(9.11)式决定.

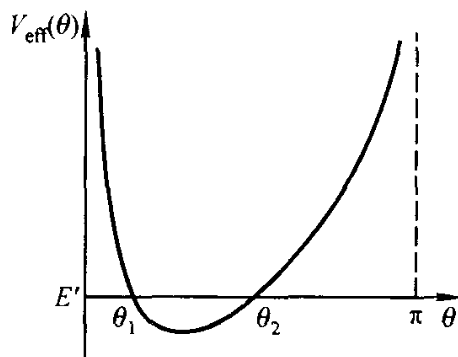


图 4.34

由(9.4)可知当章动角 θ 从 θ_1 变到 θ_2 时,进动角速度 $\dot{\varphi}$ 是否改变符号,此时要看 $L_{e_3} - L_k\cos\theta$在这个范围内是否改变符号而定. 如果 $L_{e_3} - L_k\cos\theta$ 在区间(θ_1,θ_2)内不改变符号,则 $\dot{\varphi}$ 在运动过程中不变号,陀螺的轴绕铅直方向单调地进动,同时出现章动,如图 4.35(a)所示. 如果 $L_{e_3} - L_k\cos\theta$ 在区间(θ_1,θ_2)内要变号,则在两个界面上的

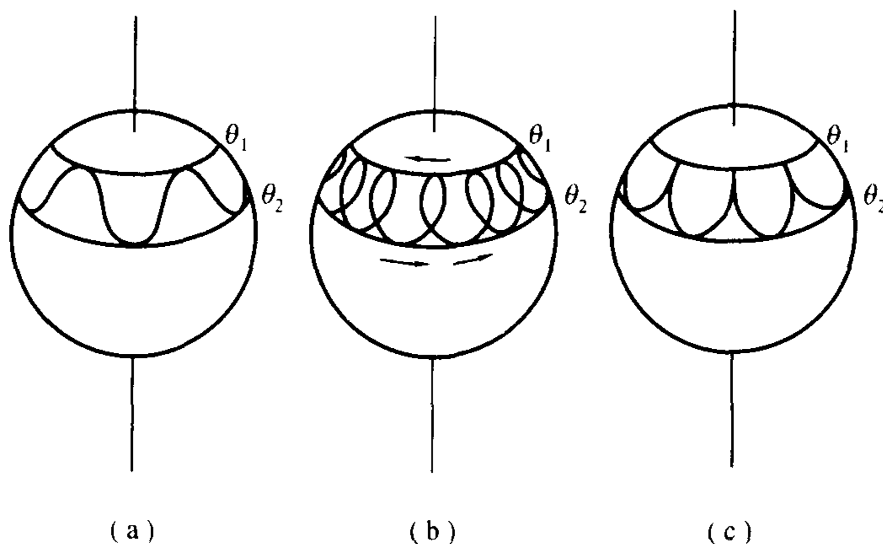


图 4.35

进动角速度 $\dot{\varphi}$ 的方向相反，所以陀螺的轴一方面绕铅直方向旋转，同时描画出许多圆圈，如图 4.35(b)所示. 最后，如果 θ_1 和 θ_2 的值中有一个与 $L_{e_3}-L_k\cos\theta$的零点重合，则在相应的界面上 $\dot{\varphi}$ 和$\dot{\theta}$ 同时等于零，于是陀螺的轴描画出像图 4.35(c)那样的轨迹.

研究陀螺运动的中心问题是解欧拉动力学方程. 这个问题在 18—19 世纪曾引起许多力学家和数学家的兴趣，做了大量的工作. 欧拉动力学方程是三个变量的二阶非线性常微分方程组，在任意的初始条件下一般很难求解. 除了本节和上节所讨论的拉格朗日陀螺和欧拉陀螺外，另一种可获得解析形式解的情形是**柯凡律夫斯卡娅**(C. B. Ковалевская, 1850－1891)**陀螺**. 这种陀螺的条件是 $I_1=I_2=2I_3$，其质心在惯量椭球的赤道平面内. 这个条件非常苛刻，很少有实际应用的价值，我们就不作讨论了.

*§4.10 快速陀螺的近似理论及其应用举例

快速陀螺也称**回转仪**，是指具有极高自转角速度的对称陀螺. 它的基本特点是：在初始条件 $\dot{\theta}$ 和 $\dot{\varphi}$ 为零的情形下，受外力矩作用后所产生的章动和进动永远很小. 上面两节我们已经讨论了对称陀螺的一般求解方法，但要得到定量的结果，计算是很复杂的. 本节我们将利用自转角速度很大的性质，给出在实际应用中有足够精确度的章动量和进动角速度的近似表示式.

我们以拉格朗日陀螺为例. 设 $t=0$ 时，陀螺具有初始条件

$$\dot{\psi}=\omega,\dot{\varphi}=0,\dot{\theta}=0,\theta=\theta_1.$$

它相当于陀螺的对称轴位于图 4.35(c)中上界圆的情况. 将它们代入(9.1)、(9.2)和(9.3)式得

$$\begin{aligned} L_{e_3} &= I_3\omega\cos\theta_1, \\ L_k &= I_3\omega, \\ E &= \frac{I_3}{2}\omega^2+mgl\cos\theta_1. \end{aligned} \tag{10.1}$$

我们用

$$x=\cos\theta_1-\cos\theta_2 \tag{10.2}$$

来表示章动量，θ_2 是图 4.35(c)的下界圆所对应的章动角. 为此我们需要求 θ_2 所满足的方程的解. 将(10.1)代入(9.11)式，得 θ_2 所满足的方程为

$$\frac{I_3^2\omega^2}{2I_1mgl}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)=1-\cos^2\theta_2. \tag{10.3}$$

令

$$p = \frac{I_3^2 \omega^2}{2I_1 mgl}, \tag{10.4}$$

并用(10.2)式的记号,我们可将(10.3)式改写为

$$x^2 + (p - 2\cos\theta_1)x - \sin^2\theta_1 = 0. \tag{10.5}$$

现在我们作近似．设陀螺的初角速度很大,以致其动能远大于运动过程中可能发生的势能的最大变化,即

$$\frac{1}{2} I_3 \omega^2 \gg mgl,$$

并假定 I_3/I_1 不是一个小量．在这种情况下．$\gg 1$,于是(10.5)式中的 $2\cos\theta_1$ 相对于 p 可以忽略．由此得(10.5)的近似解为

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 + 4\sin^2\theta_1}}{2} \approx \frac{p}{2}\left[-1 \pm \left(1 + \frac{2\sin^2\theta_1}{p^2}\right)\right].$$

根据(10.2)式,$0 < x < 1$,所以上式中的方根应取正号,由此得

$$x = \frac{\sin^2\theta_1}{p},$$

或

$$\cos\theta_1 - \cos\theta_2 = \frac{2I_1 mgl}{I_3^2 \omega^2}\sin^2\theta_1. \tag{10.6}$$

这就是快速拉格朗日陀螺章动量的近似表示式,它与 ω^2 成反比,和 $\sin^2\theta_1$ 成正比．小孩玩的陀螺,开始时角速度 ω 很大,对称轴近于垂直．θ_1 很小,所以几乎观察不到章动现象;时间一长,由于阻尼,角速度变慢,陀螺上下摆动明显增加,章动量就加大．这一现象就是(10.6)式的一个直观说明．

现在再来讨论进动问题．将(10.1)代入(9.4)式得

$$\dot{\varphi} = \frac{I_3 \omega(\cos\theta_1 - \cos\theta)}{I_1 \sin^2\theta}, \tag{10.7}$$

因为章动量很少,因此上式分母中的 $\sin^2\theta$ 可近似用 $\sin^2\theta_1$ 代替,分子中的 $\cos\theta_1 - \cos\theta$ 可近似用 $(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)/2$ 代替,所以

$$\dot{\varphi} \approx \frac{I_3 \omega(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)}{2I_1 \sin^2\theta_1} = \frac{mgl}{I_3 \omega}. \tag{10.8}$$

它表明进动角速度和 ω 成反比．

(10.8)式也可以完全不用欧拉方程,而用所谓的回转仪的初级理论得出．这种理论假定回转仪具有极大而恒定的自转角速度,以致在任何时候都使下式近似成立:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\psi}} \approx \dot{\boldsymbol{\psi}} = \omega \boldsymbol{k}, \tag{10.9}$$

式中 ω 是常数,$\boldsymbol{k}$ 的方向是可变的. 由(10.9)式可得

$$\boldsymbol{L} = I_3 \omega \boldsymbol{k}. \tag{10.10}$$

如果回转仪不受外力矩的作用,则 $\boldsymbol{k}$ 的方向不变. 现在假定回转仪受到一个外力矩 $\boldsymbol{M}$ 的作用. 此力矩是力 $\boldsymbol{F}$ 作用在离对称轴上 O 点为 l 处产生的,$\boldsymbol{F} = F\boldsymbol{e}$,因而

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = lF\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{e}. \tag{10.11}$$

将(10.10)和(10.11)代入角动量定理

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}$$

中,我们得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t} = -\frac{lF}{I_3 \omega} \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{k}. \tag{10.12}$$

我们知道单位矢量对时间的导数恒可表示为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{k},$$

式中 $\boldsymbol{\omega}_0$ 为 $\boldsymbol{k}$ 的角速度,因此(10.12)式告诉我们:回转仪在外力 $\boldsymbol{F}$ 所产生的力矩的作用下,转轴的方向 $\boldsymbol{k}$ 将以角速度

$$\boldsymbol{\omega}_0 = -\frac{lF}{I_3 \omega} \boldsymbol{e} \tag{10.13}$$

转动. 或者说,回转仪将以进动角速度

$$\dot{\varphi} = \frac{lF}{I_3 \omega} \tag{10.14}$$

绕外力 $\boldsymbol{F}$ 反方向的轴线进动. 当外力 $\boldsymbol{F}$ 为重力 $-mg\boldsymbol{k}$ 时,(10.14)式就是(10.8)式.

根据这种理论,回转仪在外力矩的作用下是不会发生章动的,拉格朗日陀螺一旦释放,将立即开始作规则进动. 这一理论的前提和结论互相有矛盾,很难使人接受. 但根据前面由欧拉方程近似解得出的结论,则不会有矛盾,(10.14)式也只是一个平均值.

由(10.14)式可以看到,如果外力作用的时间为 Δt,则回转仪的对称轴将转过角度

$$\varphi = \dot{\varphi} \Delta t = \frac{lF}{I\omega} \Delta t. \tag{10.15}$$

回转仪 $I\omega$ 的值一般都很大,在外界干扰不太大时,回转仪的轴线方向可保持稳定不变,各种实际的回转仪,大都是利用这一性质. 例如对于一个质量 $m = 5\ \mathrm{kg}$,关于对称轴的回转半径 $\rho = 0.1\ \mathrm{m}$,$\omega = 6\ 000\ \mathrm{r/min}$ 的回转仪,如外界的干扰力 $F = 9.8\ \mathrm{N}$,$l = 0.2\ \mathrm{m}$,$\Delta t = 0.1\ \mathrm{s}$,则由(10.15)可算得

$$\varphi = 0.006\ 2 = 0.6^\circ,$$

这个角度是很小的.

下面我们举一些快速陀螺应用的实际例子:

(1) 炮弹的旋转

炮弹从炮筒射出后,将受到空气阻力的作用. 设空气阻力的合力为 $\boldsymbol{F}$,$\boldsymbol{F}$ 的方向与炮弹质心的速度方向相反,但一般并不作用在炮弹的质心上,如图 4.36 所示. 若炮弹不绕对称轴高速自转,则 $\boldsymbol{F}$ 对质心 C 的力矩将使炮弹绕质心 C 转动而使弹头翻转. 所以一般炮筒内都刻有螺旋式的来复线,使炮弹离开炮筒后绕对称轴高速自转. 由于回转效应,空气阻力的力矩将使炮弹的轴线绕炮弹前进的方向($-\boldsymbol{F}$ 方向)进动,这样就能使炮弹的对称轴与前进方向保持不大的偏离,使炮弹命中目标时总是弹头在先.

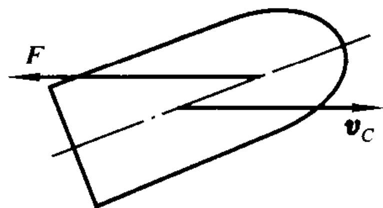


图 4.36

(2) 回转力矩

上面我们所讨论的都是快速陀螺在已知外力矩作用下的运动问题. 现在讨论它的逆问题,假定快速陀螺的运动已知,反过来求使它作这种运动所需的外力. 即根据(10.14)式,由 $\dot{\varphi}$ 来求 F 的问题. 这有重要的实际意义. 例如喷气式飞机内的涡轮轴与机身的纵轴一致,涡轮的转速通常达每分钟一万转以上,这是一个快速陀螺. 如果飞机转弯,涡轮轴的方向被迫改变,就相当于陀螺有了进动,这个进动一定是由于外力矩所产生的. 设涡轮的转速为 ω,在水平方向,飞机转弯的角速度为 ω_0,在铅直方向,轴承 AB 间的距离为 l,则由(10.14)式,可知在轴承 A 和 B 处涡轮受到垂直方向的力 F 为

$$F = \frac{I\omega\omega_0}{l}.$$

如果转弯剧烈,使 ω_0 值较大,F 的值会比静压力大几个数量级. 各种高速转动部件在运动时都会产生这种效应,机械设计时必须注意使轴承有足够的强度.

(3) 回转罗盘

回转罗盘仪是快速陀螺最重要的应用. 这种称为**电罗径**的罗盘仪能稳定地追踪方向,不受磁场影响,其精确性和稳定性超过**磁性罗盘(指南针)**,广泛应用在各类导航系统中.

图 4.37 是一种回转罗盘的示意结构,其中 M 是一圆盘,可绕自身的几何轴线 OO 自由转动,转轴架在内支架 NN 上;内支架可绕轴线 O_1O_1 转动,转轴架在外支架 PP 上;外支架又可绕定轴 O_2O_2 自由转动. 由于这三条轴线相交于一点,因此圆盘 M 上与之对应的点 M 就在空间固定不动,圆盘绕 M 点作定点转动. 我们结合图 4.38 来讨论其运动. 设在纬度 α 的地方放置一架回转罗盘,令它的外支架 O_2O_2 沿铅直方向 Oz,它的对称轴 OO 位于水平面内,取 OO 轴

为 Ox 轴并指向北极 N，y 轴垂直图面向上，即由东指西．坐标系 $Oxyz$ 并不是静止不动的，而是随同地球一起以角速度 ω_0 绕 SN 轴转动．令圆盘以高速 ω 绕对称轴 Ox 旋转，开始时轴线通过北极 N 指向某一恒星．但是由于地球以角速度 ω_0 在自转，因此轴线 OO 将偏离北极方向．要使轴线 OO 始终指着北极 N，它必须随同地球一起以角速度 ω_0 转动，每隔 24 小时转出一个顶角为 2α 的圆锥．这就是说，圆盘必须以下列角速度

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{24\times 60\times 60}\,\mathrm{s}^{-1} = 7.27\times 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}$$

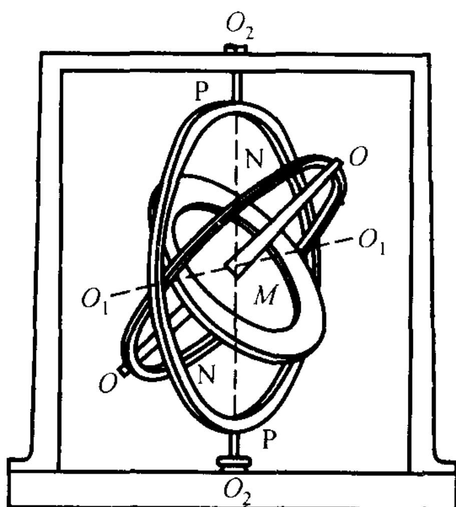


图 4.37

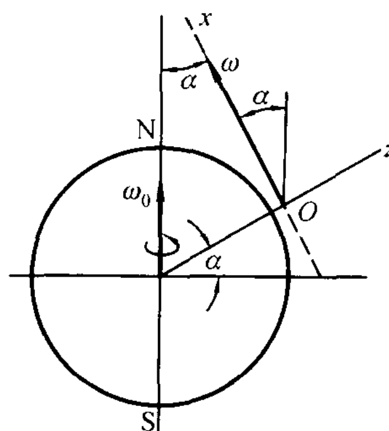


图 4.38

绕 SN 方向作进动．要使圆盘产生这种进动，必须沿东西方向（即内支架轴 O_1O_1 方向）作用一个恒力矩，它的数值由

$$|\boldsymbol{M}| = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}\right| = |\boldsymbol{\omega}_0\times\boldsymbol{L}| = \omega_0 L\sin\alpha$$

决定．这个力矩可这样来产生：在回转罗盘内环上，粘连一个半圆支架 nn，上面放置一个偏心重量 P，它离开 O_1O_1 轴的距离为 a，同时使回转罗盘的对称轴偏离水平面向上升起角度 β_0，如图 4.39 所示．此时重量 P 将对 O_1O_1 轴产生一个力矩 $Pa\sin\beta_0$．仰角 β_0 的数值可由方程

$$Pa\sin\beta_0 = I\omega_0\omega\sin(\alpha-\beta_0)$$

决定，由此得出

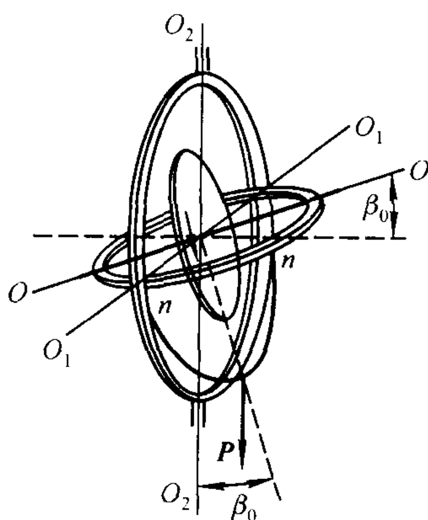


图 4.39

$$\tan\beta_0 = \frac{I\omega_0\omega\sin\alpha}{Pa + I\omega_0\omega\cos\alpha}.$$

通常将罗盘的结构设计得使 $I\omega_0\omega \ll Pa$，此时分母中的第二项可以忽略，从而

$$\tan\beta_0 \approx \beta_0 \approx \frac{I\omega_0\omega}{Pa}\sin\alpha .$$

这是一个很小的角度，使用时只要调整好这个角度，回转罗盘的对称轴即可追踪北极不变，从而可代替指南针作为罗盘使用.

*§4.11 刚体转动的稳定性

刚体转动的稳定性是讨论在什么条件下刚体的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 不随时间变化. 显然，只有外力矩为零时才有可能，即只有欧拉陀螺才谈得上转动的稳定性. 但从§4.8知道，任意初始条件下的欧拉陀螺，角动量 $\boldsymbol{L}$ 不变，角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向是随时间改变的. 所以单是外力矩为零这个条件并不能保证转动是稳定的.

外力矩为零时的欧拉动力学方程为

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_x = (I_2 - I_3)\omega_y\omega_z , \\ I_2\dot{\omega}_y = (I_3 - I_1)\omega_z\omega_x , \\ I_3\dot{\omega}_z = (I_1 - I_2)\omega_x\omega_y . \end{cases} \tag{11.1}$$

从这个方程可以看到，如果开始时转动轴线是惯量主轴之一，转动可以稳定不变. 为明确起见，假定 $t=0$ 时刚体绕 Oz 轴转动，即

$$\begin{cases} \omega_x\mid_{t=0} = \omega_y\mid_{t=0} = 0, \\ \omega_z\mid_{t=0} = \omega_0 . \end{cases} \tag{11.2}$$

将上式代入(11.1)得

$$\dot{\omega}_x\mid_{t=0} = \dot{\omega}_y\mid_{t=0} = \dot{\omega}_z\mid_{t=0} = 0. \tag{11.3}$$

由(11.2)和(11.3)即可得

$$\begin{cases} \omega_x(t) = \omega_y(t) = 0, \\ \omega_z(t) = \omega_0 , \end{cases}$$

即

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_0\boldsymbol{k} . \tag{11.4}$$

所以刚体稳定转动的必要条件有两个：外力矩必须为零，初角速度必须沿惯量主轴的方向.

刚体转动稳定性要讨论的第二个问题是：在满足上述稳定转动的条件下，如果刚体受到小的冲量矩的干扰，使转动轴稍微偏离原来的转动轴(惯量主轴)，这种偏离是否不会变得越来越大. 即如果刚体受干扰力矩作用后的角速度为

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_0\boldsymbol{k} + \boldsymbol{\omega}'(t), \tag{11.5}$$

$\boldsymbol{\omega}'(t)$的三个分量能否在任何时刻均比 ω_0 小很多. 只有这一点有保证，才能称

这种转动是稳定的,否则就是不稳定的,因为小的干扰总是不可避免的.

$\boldsymbol{\omega}'(t)$在任一时刻比 $\boldsymbol{\omega}_0$ 小很多的条件如果满足,则 ω'_x、ω'_y和 ω'_z相对于ω_0来说是一阶小量,它们的乘积是可以忽略的二阶小量. 在这种条件下,将(11.5)代入(11.1)得

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}'_x = (I_2 - I_3)\omega_0\omega'_y, \\ I_2\dot{\omega}'_y = (I_3 - I_1)\omega_0\omega'_x, \\ I_3\dot{\omega}'_z = 0. \end{cases} \tag{11.6}$$

从(11.6)中的第三个方程得

$$\omega'_z = \text{常数}. \tag{11.7}$$

将(11.6)的第一个方程对 t 求微商,再将第二个方程代入得

$$\ddot{\omega}'_x + k\omega_0^2\omega'_x = 0, \tag{11.8}$$

式中

$$k = \frac{(I_3 - I_1)(I_3 - I_2)}{I_1 I_2}. \tag{11.9}$$

如果 $k>0$,则(11.8)的解为

$$\omega'_x = A\sin(\sqrt{k}\omega_0 t + \alpha). \tag{11.10}$$

上式表明,只要冲量矩干扰终止时 ω'_x的值比ω_0 小很多,则 ω'_x在以后的时刻中也可以保持很小. 若 $k\leqslant 0$,则通过解(11.8)知 ω'_x将随时间指数增加或线性增加,转动稳定性被破坏.

经过同样的讨论可得 ω_y 所满足的方程为

$$\ddot{\omega}'_y + k\omega_0^2\omega'_y = 0,$$

式中的 k 和(11.9)式相同,因此 ω'_y和ω'_x稳定性的条件相同.

综上所述,如果干扰终止时 ω'_x、ω'_y和ω'_z均比ω_0 小得多,则当 $k>0$ 时,即

$$I_3 > I_1, I_3 > I_2 \tag{11.11}$$

或

$$I_3 < I_1, I_3 < I_2 \tag{11.12}$$

时,转动是稳定的,否则就是不稳定的. (11.11)对应于原来的转动轴是最大惯量主轴,(11.12)对应于原来的转动轴是最小惯量主轴. 换句话说,在三个惯量主轴均不相同的情况下,绕最大或最小的惯量主轴的转动是稳定的,而绕中间的惯量主轴的转动是不稳定的. 若 $I_1 = I_2 \neq I_3$,则绕 z 轴的转动是稳定的,绕 x 轴和 y 轴都是不稳定的.

*§4.12 刚体定轴转动时支点上的动反作用力

刚体定轴转动是实际问题中最常见的一类运动．刚体定轴转动的动力学问题主要研究两个方面：(1) 已知作用在刚体上的主动力，求刚体的运动规律；(2) 求轴上的约束反作用力．前一个问题比较简单，在普通物理课程中已经讨论过了，这里主要讨论后一个问题．

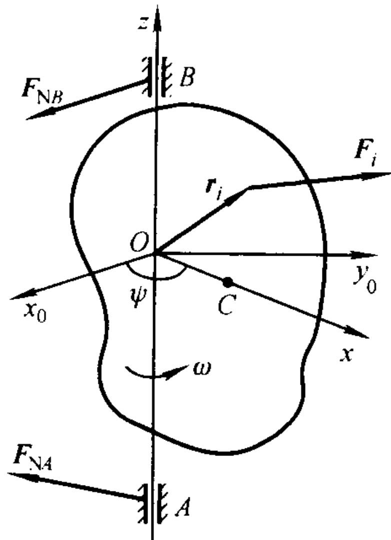


图 4.40

我们可以把刚体的定轴转动看作因受外界约束而有两点 A 和 B 固定不动的运动，在这两点受到约束反作用力为 $\boldsymbol{F}_{NA}$ 和 $\boldsymbol{F}_{NB}$．显然 AB 就是转动轴，我们把它取作为 z 轴．刚体的质心为 C，C 点到轴的距离 $OC=l$，且 $OA=a$，$OB=b$，取 O 点为坐标原点，以 OC 方向为 x 轴，它和 x_0 轴的夹角 ψ 表示刚体绕 z 轴转动的角位移．设有 n 个主动力 $\boldsymbol{F}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 作用在刚体上，$\boldsymbol{F}_i$ 的作用点为 $\boldsymbol{r}_i$，如图 4.40 所示．刚体运动的动力学方程由质心运动定理和对 O 点的角动量定理

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_C}{\mathrm{d}t^2}=\sum_i\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{F}_{NA}+\boldsymbol{F}_{NB}, \tag{12.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}=\sum_i\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i+\overrightarrow{OA}\times\boldsymbol{F}_{NA}+\overrightarrow{OB}\times\boldsymbol{F}_{NB} \tag{12.2}$$

给出．根据(6.3)式，刚体定轴转动时角动量 L 的一般表示式应为

$$\boldsymbol{L}=-I_{13}\dot{\psi}\boldsymbol{i}-I_{23}\dot{\psi}\boldsymbol{j}+I_{33}\dot{\psi}\boldsymbol{k}. \tag{12.3}$$

值得注意的是：刚体定轴转动时，角动量 $\boldsymbol{L}$ 的方向一般和角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向不一致，只有当转动轴是主轴，从而 $I_{13}=I_{23}=0$ 时，$\boldsymbol{L}=I_{33}\dot{\psi}\boldsymbol{k}$，角动量才和角速度的方向一致．将(12.3)代入(12.2)并把(12.1)和(12.2)写成标量形式，最后得刚体定轴转动的动力学方程为：

$$-ml\dot{\psi}^2=\sum_i F_{ix}+F_{Ax}+F_{Bx}, \tag{12.4}$$

$$ml\ddot{\psi}=\sum_i F_{iy}+F_{Ay}+F_{By}, \tag{12.5}$$

$$\sum_i F_{iz}+F_{Az}+F_{Bz}=0, \tag{12.6}$$

$$-I_{13}\ddot{\psi}+I_{23}\dot{\psi}^2=\sum_i(y_iF_{iz}-z_iF_{iy})+(aF_{Ay}-bF_{By}), \tag{12.7}$$

$$-I_{23}\ddot{\psi}-I_{13}\dot{\psi}^2=\sum_i(z_iF_{ix}-x_iF_{iz})+(bF_{Bx}-aF_{Ax}),\qquad(12.8)$$

$$I_{33}\ddot{\psi}=\sum_i(x_iF_{iy}-y_iF_{ix}).\qquad(12.9)$$

这六个方程中,(12.9)与轴上的约束力 $\boldsymbol{F}_{NA}$ 和 $\boldsymbol{F}_{NB}$ 无关,不必和其他方程联立即可独立求解. 设其解为

$$\psi=\psi(t),$$

将它代入(12.4)、(12.5)、(12.7)、(12.8)四式,然后对 F_{Ax}、F_{Ay}、F_{Bx}、F_{By} 四个未知函数求解,即可得 A 点和 B 点的垂直于转动轴方向的约束力. 但对轴方向的约束力,只能由(12.6)式求出其合力 $F_{Nz}=F_{Az}+F_{Bz}$,不能分别决定 F_{Az} 和 F_{Bz}. 如果在轴的方向除重力之外没有其他主动力,则当转轴水平时,$F_{Az}=F_{Bz}=0$,当转轴为铅直方向时,$F_{Az}=mg$,$F_{Bz}=0$.

当刚体静止时,$\dot{\psi}=\ddot{\psi}=0$,此时(12.4)、(12.5)、(12.7)和(12.8)式左边均为零,它们就是刚体的平衡方程,由此可求出轴上的静反作用力 F_{Ax}、F_{Ay}、F_{Bx}、F_{By} 和 F_{Nz};(12.9)中不出现约束力,是刚体平衡条件. 当刚体转动时,$\dot{\psi}\neq0$,$\ddot{\psi}\neq0$,这时由(12.4)~(12.8)计算出来的 F_{Ax}、F_{Ay}、F_{Bx}、F_{By} 可以和静反作用力相差很大,其附加部分称为**动反作用力**. 从方程中可以看出,当 $\dot{\psi}\neq0$, $\ddot{\psi}\neq0$ 时要使动反作用为零,必须同时具备两个条件:

$$l=0, I_{13}=I_{23}=0.$$

前者要求刚体质心必须在转动轴上,后者要求转动轴必须是惯量主轴. 如果这两个条件不满足,那么当刚体转动的角速度和角加速度很大时,轴上可能存在很大的动反作用力,使机器受到损坏. 所以机器中高速运转部件的制造与安装,必须十分重视这两个条件.

【例 1】 质量为 20 kg 的转子绕对称轴以角速度 $\omega=$ 12 000 r/min转动. 若由于材料不均匀或安装时的偏差,其质心 C 偏离轴线 $\delta=0.1$ mm(图 4.41). 求 A、B 两轴承上所受的动反作用力.

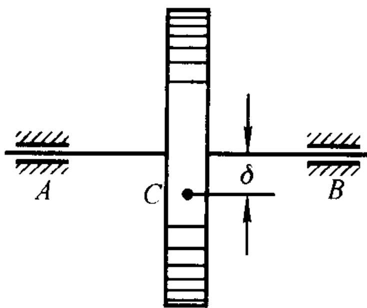


图 4.41

解: 这种情况下转动轴仍是惯量主轴,$I_{13}=I_{23}=0$,但质心不在轴线上,$l=\delta$. 根据对称性的考虑,两个轴上所受到的动反作用力应相等. 因此

$$F_{NA}=F_{NB}=\frac{m\delta\omega^2}{2}=\frac{20\times0.0001}{2}\times\left(\frac{12\,000\times2\pi}{60}\right)^2\ \text{N}$$
$$=1.58\times10^3\ \text{N}.$$

而静反作用力只有 $F'_{NA}=F'_{NB}=\frac{mg}{2}=98$ N. 所以附加动反作用力要比静反作用力大 16 倍. 消除的办法是在安装后,在转子上附加平衡质量,使 δ 尽可能减少.

【例 2】 把涡轮看成是一个均匀圆盘. 设由于安装不善,涡轮转动轴与盘面法线成交角 $\alpha = 1°$. 已知涡轮质量为 20 kg,半径 $r = 0.2$ m,质心在转动轴上,距 A、B 二个轴承为 $a = b = 0.5$ m,设轴以 12 000 r/min 的角速度转动,求轴承上动反作用力.

解: 如图 4.42 所示,设想有一刚性无质量的圆柱体,将涡轮圆盘嵌入它的内部,圆柱体的轴和涡轮的转动轴重合,则涡轮的定轴转动就可用圆柱体绕它的几何轴的转动来表示. 均质圆柱体绕轴线的定轴转动是我们所熟悉的,现在所不同的是质量分布不均匀,嵌有圆盘的部分密度 $\rho =$ 常数 $\neq 0$,其余部分 $\rho = 0$. 由于圆盘中心 O 的法线 Oz' 和转动轴 Oz 的方向不重合,因此转动轴不是惯量主轴. 所以本题是属于方程(12.4)~(12.9)中 $l = 0$,但 $I_{13} \neq 0$, $I_{23} \neq 0$ 的情况.

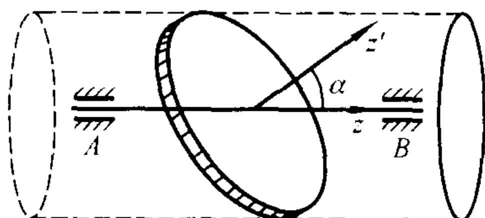


图 4.42

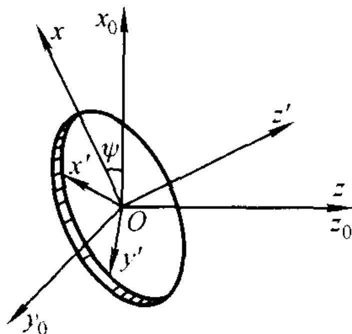


图 4.43

为了计算轴 A 和 B 所受的约束反作用力,我们选取如图 4.43 中所示的三套坐标系. 第一套是固定坐标系 $Ox_0y_0z_0$, O 为圆盘重心, Oz_0 轴为转动轴,假定它在水平方向, Ox_0 轴铅直向上. 第二套坐标系 $Oxyz$ 固定在圆柱体上,其中 Oz 轴和 Oz_0 轴重合, Ox 轴 Ox_0 轴的夹角为 ψ, $\dot{\psi}$ 即为圆盘的角速度 ω. 第三套坐标系 $Ox'y'z'$ 是由圆盘的三个对称轴组成的. Oz' 轴和 Oz_0 轴的夹角为 α. 由(12.4)、(12.5)、(12.7)、(12.8)得圆盘的运动方程为

$$F_{NAx} + F_{NBx} = mg\cos\psi, \tag{1}$$

$$F_{NAy} + F_{NBy} = -mg\sin\psi, \tag{2}$$

$$I_{23}\omega^2 = a(F_{NAy} - F_{NBy}), \tag{3}$$

$$I_{13}\omega^2 = a(F_{NAx} - F_{NBx}). \tag{4}$$

由这四个方程即可解出轴上的反作用力 F_{NAx}、F_{NAy}、F_{NBx} 和 F_{NBy}:

$$F_{NAx} = \frac{1}{2}\left(mg\cos\psi + \frac{I_{13}}{a}\omega^2\right), \tag{5}$$

$$F_{NBx} = \frac{1}{2}\left(mg\cos\psi - \frac{I_{13}}{a}\omega^2\right), \tag{6}$$

$$F_{NAy} = -\frac{1}{2}\left(mg\sin\psi - \frac{I_{23}}{a}\omega^2\right), \tag{7}$$

$$F_{NBy} = -\frac{1}{2}\left(mg\sin\psi + \frac{I_{23}}{a}\omega^2\right). \tag{8}$$

下面我们来计算 I_{13} 和 I_{23}. 在 § 4.5 中我们已经给出在 $Ox'y'z'$ 系中圆盘的转动惯量张量:

$$I'_{11}=I'_{22}=\frac{1}{4}mr^2, I'_{33}=\frac{1}{2}mr^2,$$
$$I'_{13}=I'_{23}=I'_{12}=0.$$

我们可利用它们来求 $Oxyz$ 系中的 I_{13} 和 I_{23}. 为此只要找出 $Oxyz$ 系和 $Ox'y'z'$ 系的坐标变换关系即可. 这两个坐标系都是固定在刚体上的. 两者之间的关系与圆盘运动与否无关. 我们取 $t=0$ 时圆盘和 Oy_0 轴的交线为 Oy 轴. 由于圆盘的对称性, Oy' 轴可取圆盘的任何一条半径, 即使在运动过程中, Oy' 的位置不断在变化也可以. 因此我们可取 Oy' 和 Oy 也重合. 此时 $Oxyz$ 和 $Ox'y'z'$ 的坐标变换关系可由图 4.44 得到

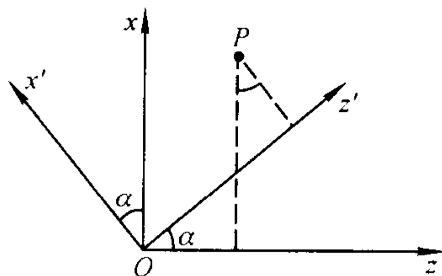


图 4.44

$$\begin{cases} x_i = x'_i\cos\alpha + z'_i\sin\alpha, \\ z_i = -x'_i\sin\alpha + z'_i\cos\alpha, \\ y_i = y'_i. \end{cases} \tag{9}$$

于是

$$\begin{aligned} I_{13} = \sum_i m_i x_i z_i &= \frac{1}{2}\sin 2\alpha(I'_{11}-I'_{33}) + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)I'_{13} \\ &= \frac{1}{2}\sin 2\alpha\left(\frac{1}{4}mr^2 - \frac{1}{2}mr^2\right) = -\frac{1}{8}mr^2\sin 2\alpha, \end{aligned} \tag{10}$$

$$I_{23} = \sum_i m_i y_i z_i = -I'_{12}\sin\alpha + I'_{23}\cos\alpha = 0. \tag{11}$$

将它们代入(5)、(6)、(7)和(8)式,最后得

$$\begin{cases} F_{NAx} = \frac{1}{2}\left(mg\cos\psi - \frac{1}{8a}mr^2\omega^2\sin 2\alpha\right) \\ F_{NBx} = \frac{1}{2}\left(mg\cos\psi + \frac{1}{8a}mr^2\omega^2\sin 2\alpha\right) \\ F_{NAy} = -F_{By} = -\frac{1}{2}mg\sin\psi. \end{cases} \tag{12}$$

将题目所给的具体数值代入,得每一轴承上的动反作用力为

$$\begin{aligned} F_N &= \frac{1}{16a}mr^2\omega^2\sin 2\alpha \\ &= \frac{1}{16}\times 20\times(0.2)^2\times(400\pi)^2\times 0.034\,9\text{ N} \\ &= 5.5\times 10^3\text{ N}. \end{aligned}$$

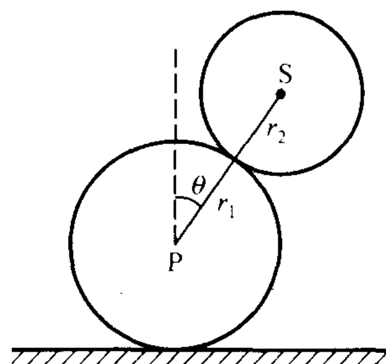
而每个轴承上的静反作用力只有 98 N,动反作用力要比静作用力约大 56 倍.

习　题

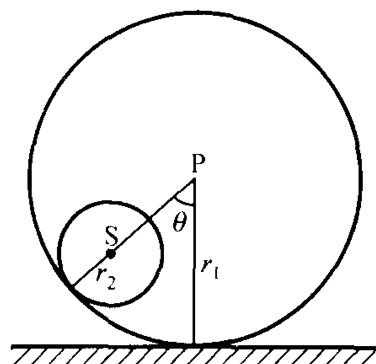
4.1　半径为 r_1 的圆柱体 P 约束在水平面上运动,另一个半径为 r_2 的圆柱体 S 约束在 P 上运动(如图所示). 分别就下列三种情况写出体系的自由度,并选取适当的广义坐标表示

S 和 P 的角速度:(1) P 固定不动,S 在 P 上只滚不滑;(2) S 和 P 之间,P 和平面之间绝对粗糙,接触点相对速度都是零;(3) S 和 P 之间、P 和平面之间均绝对光滑.

4.2 同上,但S约束在P的内壁运动(如图所示).分别就下列两种情形确定体系的自由度,并用适当的广义坐标表示出 S 和 P 的角速度:(1) S 和 P 间绝对粗糙,P 和平面间绝对光滑;(2) S 和 P 间绝对光滑,P 和平面间绝对粗糙.



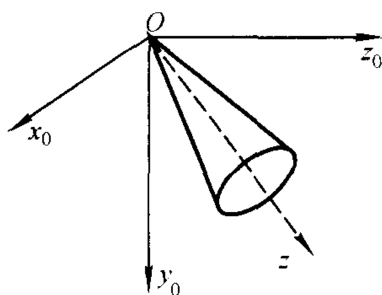
题 4.1 图



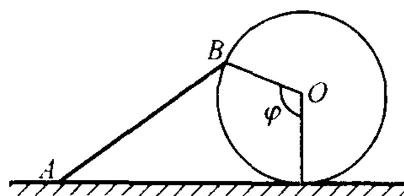
题 4.2 图

4.3 顶点悬挂于定点 O 的圆锥,以等角速度 ω_1,绕其几何轴 Oz 运动,Oz 轴恒在铅直平面 Oy_0z_0 内,并绕水平轴 Ox_0 以角速度 ω_2 转动. 设圆锥高为 h,底面半径为 R,问 ω_1 和 ω_2 满足什么条件时可使圆锥的瞬时转轴位于圆锥表面上.

4.4 一半径为 R 的圆盘以等速 v_0 沿一直线滚动而无滑动,长 l 的杆 AB 以铰链连接于盘边缘上的 B 点,A 端则沿上述直线滑动. 求杆 AB 的角速度和 A 点的线速度.



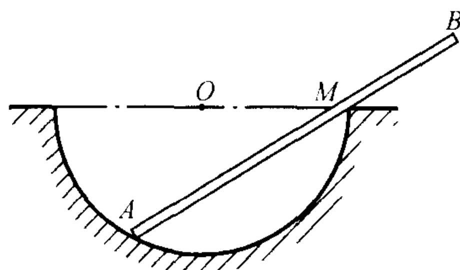
题 4.3 图



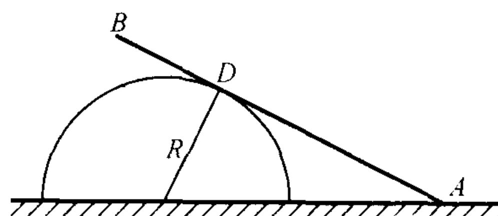
题 4.4 图

4.5 长为 l 的杆 AB 在一固定平面内运动,其 A 端在半径为 R 的半圆周里滑动,杆与圆周上的 M 点始终接触,试求杆上任一点的轨迹及瞬时中心的轨迹.

4.6 杆 AB 与半径为 R 的半圆周相切,A 端以等速度 v_0 沿水平方向运动,求杆 AB 的角速度 ω 及杆上和圆相切点 D 的速度 v_D.



题 4.5 图



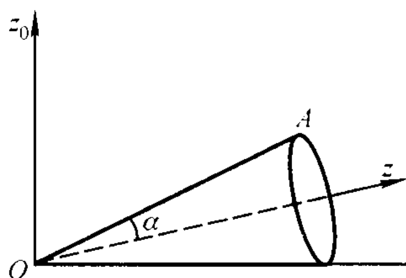
题 4.6 图

4.7 高为 h,顶角为 2α 的圆锥在一平面上滚而不滑,如此锥体以等角速度 ω 绕 Oz_0 轴转动,求此圆锥底面上最高点 A 的速度和加速度.

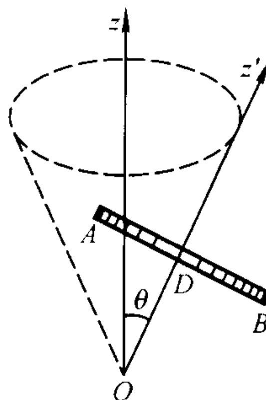
4.8 转轮 AB 绕其对称轴 Oz 轴转动的角速度为 ω_1,而 Oz 轴绕铅直轴 Oz_0 转动,角速度为 ω_2,如

$$AD = DB = a, OD = b,$$

求转轮最低点 B 的速度.



题 4.7 图



题 4.8 图

4.9 章动角不变,进动角速度和自转角速度均为常数的刚体定点转动称为**规则运动**,相应的欧拉角可用下式表示

$$\varphi = at, \psi = bt, \theta = c,$$

式中 a、b、c 均为常数,求此情况下刚体角速度 $\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t$ 的表示式.

***4.10** 刚体作平面平行运动时,可看成本体极迹在空间极迹上作纯滚动. 假定刚体的角速度 ω 和本体极迹及空间极迹的曲率半径 ρ_1 和 ρ_2 均已知,证明刚体在运动过程中瞬时转动中心 O 的速度为:

$$v_O = \omega \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 \pm \rho_2}.$$

4.11 证明半径为 r,质量为 m 的空心球壳绕直径的转动惯量为 $2mr^2/3$.

4.12 证明底面半径为 r,高为 h 的圆锥体绕对称轴的转动惯量为 $\frac{3}{10}mr^2$,绕底面任一直径的转动惯量为 $\frac{1}{20}m(3r^2+2h^2)$.

4.13 半径为 r 的均匀圆盘,放在粗糙水平桌面上,绕通过中心的铅直轴转动. 初始角速度为 ω_0,设圆盘与桌面的摩擦因数为 μ,问经过多少时间后圆盘将静止.

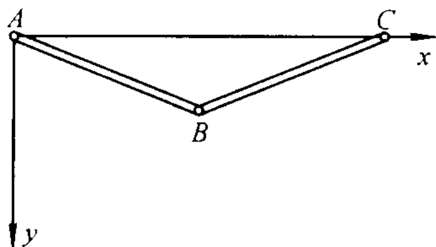
4.14 边长为 l 的等边三角形,求绕通过某一边中点并与三角形的面垂直的轴转动时的等值单摆摆长.

4.15 杆子一端置于光滑的水平面上,另一端靠在光滑墙上,杆与地面的倾角为 α. 如使杆自此位置自由下滑,求杆与墙分离的瞬间杆与地面的倾角 θ.

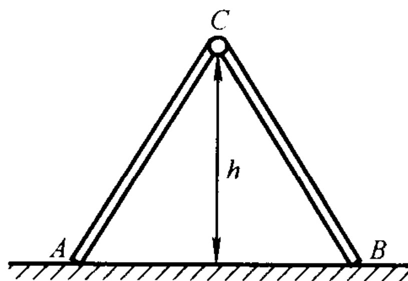
4.16 两根相同的均匀杆 AB 和 BC,在 B 点用光滑铰链连接,C 点可沿光滑水平轨道运动,AB 能在铅直平面内绕 A 点自由转动. 在 $t=0$ 时,ABC 成直线,并处于静止状态. 求

杆运动时处于任一位置时 C 点的约束力.

4.17 两根等长等重的均匀细杆 AC 及 BC,在 C 点用铰链连接,铅直地放在光滑水平面上. 设两杆由图示位置以初速度为零开始运动. 求 C 点着地时的速度.



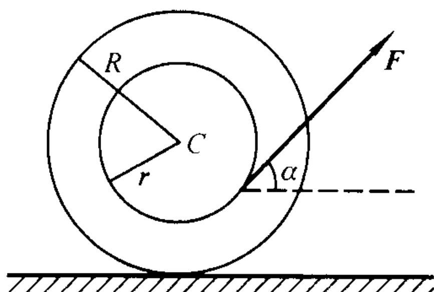
题 4.16 图



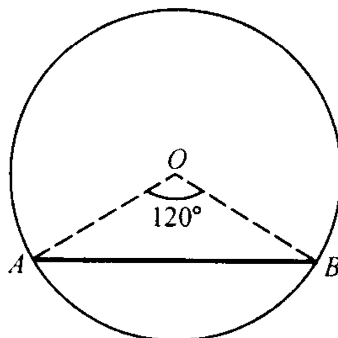
题 4.17 图

4.18 半径为 R 的轮子质量为 m,轮轴的半径为 r,质量可忽略不计,轮轴上绕以轻绳,绳端作用一恒力 F,其方向与水平面成 α 角. 假定轮子在水平面上只滚不滑,求轮心 C 的加速度.

4.19 均匀棒 AB 可在光滑的铅直圆周内滑动. 若棒所张的圆内角为 120°,求此棒运动时的等值单摆的摆长.



题 4.18 图



题 4.19 图

4.20 一面粗糙另一面光滑的平板,质量为 m',将光滑的一面放在水平桌上,在板上放一质量为 m 的球. 若板沿其长度方向突然有一速度 v,问此球经过多少时间后开始作纯滚动?

4.21 写出 4.1 题的运动微分方程.

4.22 求均匀圆锥体绕母线的转动惯量.

4.23 求均匀圆锥体底面圆周上一点的惯量椭球方程.

4.24 均质长方体的三边长分别为 $2a$、$2a$ 和 $3a$,质量为 m,求其对一顶点的惯量椭球方程.

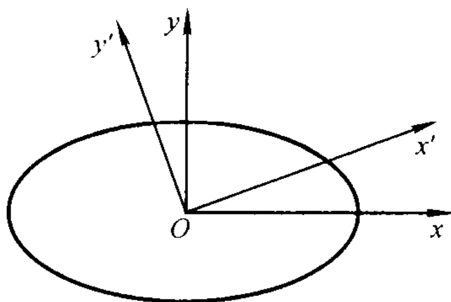
4.25 均质圆锥体高为 h,底半径为 r,质量为 m,求在什么条件下它对于质心的惯量椭球为一圆球.

4.26 在一个平面刚体上有两个具有公共原点 O 的坐标系 Oxy 和 $Ox'y'$,证明:

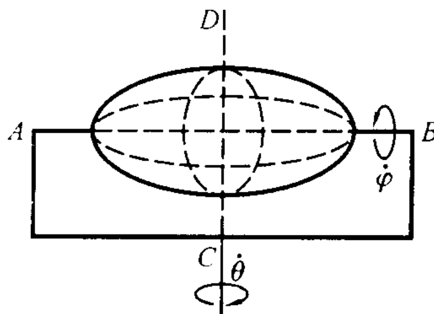
$$I_{x'x'} + I_{y'y'} = I_{xx} + I_{yy},$$

并给出其物理解释.

4.27 均匀椭球绕自己的一个对称轴 AB 以角速度 $\dot{\varphi}$ 转动,并且 AB 轴又以角速度 $\dot{\theta}$ 绕通过椭球中心并与 AB 垂直的 CD 轴转动,写出椭球的动能和角动量.

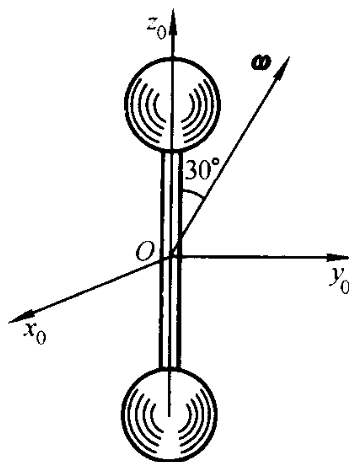


题 4.26 图



题 4.27 图

4.28 由两个质量为 m,半径为 b 的全同的均匀钢球和一质量可忽略的刚性轻杆所组成的"哑铃"状刚体绕其质心 O 自由转动. 两球心间距为 l. 设在时刻 t,此"哑铃"的杆正好和 Oz_0 轴重合,且角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 正好在 Oy_0z_0 平面内,$\boldsymbol{\omega}$ 和 Oz_0 轴的夹角为 30°. 写出此时刻"哑铃"的角动量 $\boldsymbol{L}$ 和动能 T.



题 4.28 图

4.29 对称陀螺的轴位于铅直位置,陀螺以很大角速度 ω 作稳定的自转. 今突然在离定点 d 处作用一与陀螺的垂直轴垂直的冲量 p. 证明在陀螺此后的运动中,最大章动角近似为 $2\arctan\left(\dfrac{pd}{I_3\omega}\right)$.

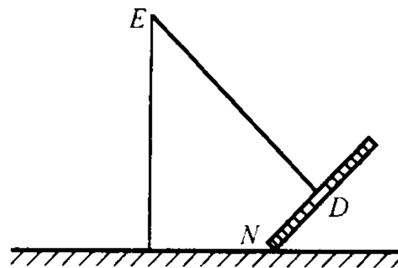
***4.30** 质量为 m、半径为 r 的均质圆盘的中心 D 与固定点 E 用长为 l 的刚性轻杆相连. 圆盘在水平面上作纯滚动,ED 和盘面垂直,求盘和水平面的接触点 N 的动反作用力 F_N.

***4.31** 一个半径为 r 的均质圆盘绕其质心旋转,开始时给此盘以角速度 ω_0,使它绕一条与盘面法线成 α 角的轴旋转,求进动角速度 ω' 及进动轴与盘面法线所成的角 θ.

***4.32** 证明快速拉格朗日陀螺章动角速度的近似值为

$$\dot{\theta} = \frac{mgl}{I_3\omega\sin\theta}\sin\left(\frac{I_3}{I_1}\omega t\right),$$

进而证明进动角速度 $\dot{\varphi}$ 亦按频率 $I_3\omega/I_1$ 随时间变化,其平均值为 $mgl/I_3\omega$.



题 4.30 图

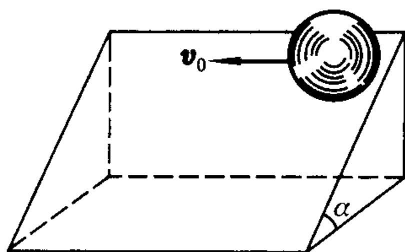
***4.33** 一陀螺由半径为 $2r$ 的薄圆盘及一通过圆盘中心 C,并和盘面垂直的长为 r 的杆轴所组成,杆的质量可忽略不计. 将杆的另一端 A 放在水平面上,使其作无滑动的转动. 如

起始时杆 AC 与铅直线的夹角为 α，起始时的总角速度为 ω，方向沿着 α 角的平分线，证明经过

$$t=\int_{\alpha}^{0}\frac{\mathrm{d}\theta}{\omega\sqrt{1-\cos^{2}\frac{\alpha}{2}\sec^{2}\frac{\theta}{2}+k(\cos\alpha-\cos\theta)}}$$

后杆将直立起来. 式中 $k=\frac{g}{r\omega^{2}}$，θ 为任一瞬时杆轴与铅直杆的夹角.

*4.34　半径为 r 的均匀球在倾角为 α 的斜面上作纯滚动，设 $t=0$ 时，球心有一水平方向的初速度 v_0，分别用拉格朗日方程和欧拉动力学方程写出球的运动方程，并给出其运动积分.



题 4.34 图

4.35　质量为 m' 半径为 r 的光滑圆环放在水平面上，环上套有一质量为 m 的质点，开始时两者均静止，$t=0$ 时质点在环的切线方向得到冲量 mv_0，讨论环和质点以后的运动情况.

4.36　质量为 m 的陀螺以等角速度 ω_1 绕对称轴自转. 已知陀螺对称轴与铅直线间的夹角为 θ，并绕铅直线以角速度 ω_2 进动. 求陀螺作稳定进动的条件.

4.37　一陀螺 $I_1=I_2=2I_3$，绕质心旋转，并作规则进动. 已知此陀螺自转角速度为 ω_1，其自转轴与进动轴间的夹角 $\theta=60°$，求进动角速度 ω_2.

4.38　如果拉格朗日陀螺开始时 $\theta=60°$，$\dot{\theta}=0$，$\dot{\varphi}=2\left(\frac{mgl}{3I_1}\right)^{\frac{1}{2}}$，$\omega_z=\frac{I_1}{I_3}\sqrt{\frac{3mgl}{I_1}}$，求证在以后的运动过程中，$\theta$ 满足的方程式为

$$\sec\theta=1+\operatorname{sech}\sqrt{\frac{mgl}{I_1}}t.$$

4.39　求拉格朗日陀螺绕铅直轴作稳定转动的条件.

4.40　由四根质量为 m、长为 l 的匀质杆所组成的正方形刚体 $ABCD$ 绕顶角 A 自由转动. (1) 找出 A 点的惯量主轴，并计算其主转动惯量；(2) 设 $t=0$ 时，体系位于铅直平面内，AC 和铅直线的夹角为 30°，角速度的大小为 ω，方向正好和铅直线一致. 写出此时刻刚体的角动量和动能. (3) 写出体系的运动方程.

*4.41　质量为 m 的矩形匀质薄板 $ABCD$ 可绕固定点 A 自由转动，开始时薄板静止于平衡位置，今在 C 点给薄板以一垂直于板面的冲量 I，求打击后 C 点的速度和板的动能.

*4.42　半径为 r 质量为 m 的圆球，在内半径为 $R(R>r)$ 的固定竖直圆柱壁的内表面作纯滚动，求证球心在竖直方向的运动是简谐运动或匀速直线运动.

4.43　形如旋转椭球的橄榄球绕其三个主轴的转动惯量分别为 I_1、$I_2(=I_1)$ 和 $I_3(>I_1)$. 当其在长轴成 θ 角的方向上获得一个角速度 ω 时，求角动量 L 及进动角速度 ω'.

第五章　非惯性参考系

本章首先讨论不同参考系之间速度和加速度的变换关系. 参考系的转动会引起牵连运动,只要在刚体运动学的基础上再加上相对运动部分,即可得出两个参考系之间的速度和加速度的变换关系. 其次讨论非惯性系中的动力学方程,在牛顿力学中引进了惯性力后,质点的动量定理、角动量定理和动能定理与牛顿第二定律一样保持原来的形式不变;讨论拉格朗日函数的不确定性,给出了非惯性系中拉格朗日函数的一般形式. 最后,作为非惯性系中动力学理论的应用实例,简单地讨论地球转动的动力学效应和磁共振的经典理论.

§5.1　不同参考系之间速度和加速度的变换关系

迄今为止,不论是运动学问题还是动力学问题,我们都是在惯性系中来讨论的. 地球并不是一个严格的惯性系,我们在地球上所观察到的各种力学现象,实际上是非惯性系中的力学问题. 虽然在大多数问题中地球的非惯性效应可以忽略,但在某些问题中,如人造卫星相对于地球的运动,重力加速度随纬度的变化等,地球的自转效应就不能忽略了.

设 S 和 S′是两个不同的参考系,譬如说 S 是一个惯性系,S′是一个非惯性系. S′相对于 S 的运动,一般情况下既有平动,也有转动. 我们先讨论 S′相对于 S 只有转动的情况. 在讨论刚体转动时,我们引进了两个坐标系:固定在空间的 $Ox_0y_0z_0$ 系和固定在刚体上的 $Oxyz$ 系. 如果我们把前者看成参考系 S,把后者看成参考系 S′,那么由于参考系 S′的旋转所引起的效应,实际上就是刚体的转动效应.

如图 5.1 所示,设 $Ox_0y_0z_0$ 是惯性系 S,$Oxyz$ 系(S′系)相对 S 系以角速度 ω_0 旋转. 让我们来考察质点 P 在两个参考系中的运动情况. P 点的位置矢量为:

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}. \tag{1.1}$$

这个表示式不论在 S 系中还是在 S′系中都是适用的. 质点在非惯性系 S′中的速度称为**相对速度**,用 $\boldsymbol{v}'$ 表示:

$$v' = \frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k}. \tag{1.2}$$

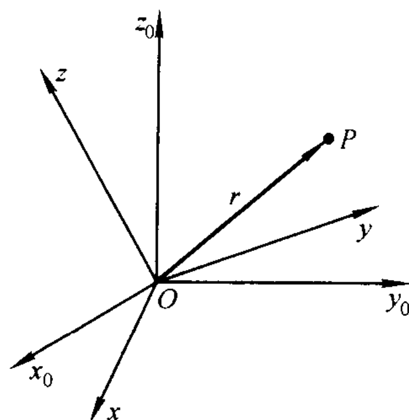


图 5.1

符号$\frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}$表示在 S′系中的微商运算. 在 S′系中,单位矢量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 是不随时间改变的,因此

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t} = \frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t} = \frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t} = 0.$$

质点 P 在惯性系 S 中的速度 $\boldsymbol{v}$ 称为**绝对速度**:

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k} + x\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t} + y\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t} + z\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t}. \tag{1.3}$$

因为 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 是固定在 S′系中随 S′系一起运动的,因此

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{i},\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{j},\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{k}.$$

代入(1.3)式得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k} + \boldsymbol{\omega}_0 \times (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \\ &= \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{r}.\end{aligned} \tag{1.4}$$

显然,如果(1.1)式中的 $\boldsymbol{r}$ 不是位置矢量,而换为任意一个矢量 $\boldsymbol{A}$,则有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{A}.$$

因此两个相互间以角速度 $\boldsymbol{\omega}_0$ 转动的参考系之间对时间求微商的算符变换关系为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}_0 \times. \tag{1.5}$$

(1.4)给出了 S 系和 S′系之间的速度变换关系,再利用(1.5)式即可方便地求出绝对加速度 $\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$和相对加速度$\boldsymbol{a}' = \frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t}$之间的关系:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{r}) \\ &= \frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{v}' + \frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{\omega}_0}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega}_0 \times \frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{r}).\end{aligned}$$

因

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_0}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}_0 \times\right)\boldsymbol{\omega}_0 = \frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{\omega}_0}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}',\ \frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{a}',$$

所以

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_0}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{r}) + 2\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{v}'. \tag{1.6}$$

其中$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_0}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{r})$称为**牵连加速度**,这两项完全是由于参考系的旋转而引起的;$2\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{v}'$称为**科里奥利**(Coriolis)**加速度**,它的出现除由于参考系的旋转外,还和质点的相对速度有关.

如果S′相对于S的运动,除了转动$\boldsymbol{\omega}_0$外,还有平动$\boldsymbol{v}_0$,则在(1.4)和(1.6)中,只要再加一项平动所引起的牵连速度$\boldsymbol{v}_0$和牵连加速度$\boldsymbol{a}_0 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_0}{\mathrm{d}t}$即可:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{r}, \tag{1.7}$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}_0 + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_0}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{r}) + 2\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{v}'. \tag{1.8}$$

最重要的一种非惯性系是以等角速度$\boldsymbol{\omega}_0$旋转的、没有平动加速度的参考系,此时$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_0}{\mathrm{d}t}=0$,$\boldsymbol{a}_0=0$,并且由图5.2得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{r}) &= \boldsymbol{\omega}_0(\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \boldsymbol{r}) - \boldsymbol{\omega}_0{}^2 \boldsymbol{r} \\ &= (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP})\boldsymbol{\omega}_0^2 = -\boldsymbol{\omega}_0^2 \boldsymbol{R}.\end{aligned}$$

于是(1.8)式简化为

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' - \boldsymbol{\omega}_0^2 \boldsymbol{R} + 2\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{v}', \tag{1.9}$$

式中$R = BP$为质点P到转动轴的距离,$-\boldsymbol{\omega}_0^2 \boldsymbol{R}$是质点的向心加速度.所以,等速旋转而没有平动加速度的参考系中的牵连加速度只包含向心加速度.

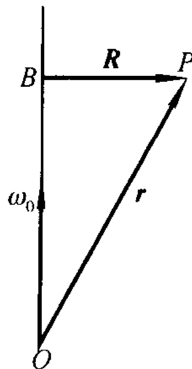


图 5.2

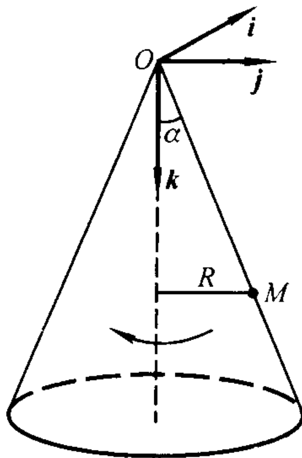


图 5.3

【例1】 质点M离开圆锥顶点O沿母线以恒定相对加速度a'在槽内运动,圆锥以等角速度ω绕其轴转动,求经过时间t后,质点M的绝对加速度.设圆锥半顶角为α.

解：根据本题所给条件，可按(1.9)式来确定 M 点的绝对加速度．经过时间 t 后，质点自 O 点运动到 M 点，此时

$$v' = a't,$$

$$R = \frac{1}{2}a't^2\sin\alpha.$$

取一组单位矢量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 如图 5.3 所示，则

$$\boldsymbol{a}' = a'(\cos\alpha\boldsymbol{k} + \sin\alpha\boldsymbol{j}),$$

$$\boldsymbol{a}_t = -\omega^2\boldsymbol{R} = -\frac{\omega^2a't^2}{2}\sin\alpha\boldsymbol{j},$$

$$\boldsymbol{a}_C = 2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}' = -2\omega a't\sin\alpha\boldsymbol{i}.$$

因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_C \\ &= -2\omega a't\sin\alpha\boldsymbol{i} + \left(a'\sin\alpha - \frac{\omega^2a't^2}{2}\sin\alpha\right)\boldsymbol{j} + a'\cos\alpha\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

【例 2】 如图 5.4 所示的离心调速器，两根长为 l 的对称杆 OA 和 OB 以角速度 ω_1 绕一固定铅直轴 OC 转动，同时两杆又可以角速度 $\omega_2 = \dot{\theta}$ 绕 O 点转动．求小球 A 和 B 的绝对速度．

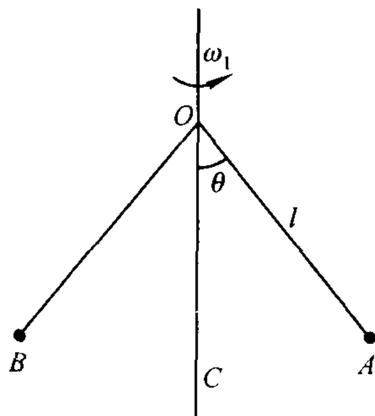


图 5.4

解：本题可用质点运动学或刚体运动学的方法来解，也可用本节相对运动学的方法来解．如取杆 OA 和 OB 所在平面为活动参考系 S′，并取如图 5.5(a)所示的一组单位矢量，则 S′系的角速度为

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \omega_1\boldsymbol{k},$$

小球 A 的位置矢量为

$$\boldsymbol{r} = l\sin\theta\boldsymbol{i} - l\cos\theta\boldsymbol{k},$$

因此小球的相对速度为

$$\boldsymbol{v}' = \frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = l\omega_2(\cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{k}),$$

由于 S′系的运动而引起的牵连速度为

$$\boldsymbol{v}_t = \boldsymbol{\omega}_0\times\boldsymbol{r} = l\omega_1\sin\theta\boldsymbol{j}.$$

所以小球 A 的绝对速度为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}_t = l\omega_2(\cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{k}) + l\omega_1\sin\theta\boldsymbol{j}. \tag{1}$$

我们在前面的讨论中，都是把单位矢量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 取为固定在参考系 S′中随 S′一起运动的，即 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 是 S′系中固定坐标(直角坐标)的单位矢量．但是在 S′系中我们也可取活动坐标．例如可取图 5.5(b)中所示的一组单位矢量，这时 $\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t}\neq 0$，而是

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{i} = \omega_2\boldsymbol{j}.$$

在这样一组单位矢量中，

$$\boldsymbol{r}=l\boldsymbol{i},$$

$$\boldsymbol{\omega}_0=\omega_1(-\cos\theta\boldsymbol{i}+\sin\theta\boldsymbol{j}),$$

$$\boldsymbol{v}'=\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=l\omega_2\boldsymbol{j},$$

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{t}}=\boldsymbol{\omega}_0\times\boldsymbol{r}=-l\omega_1\sin\theta\boldsymbol{k},$$

所以得

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{v}_{\mathrm{t}}=l\omega_2\boldsymbol{j}-l\omega_1\sin\theta\boldsymbol{k}. \tag{2}$$

和(1)比较,由于单位矢量的选取不一样,因此$\boldsymbol{v}$在$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$上的投影也不一样. 但$\boldsymbol{v}$的大小只和参考系有关,与$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$的选取无关,无论由(1)或(2)式均可得

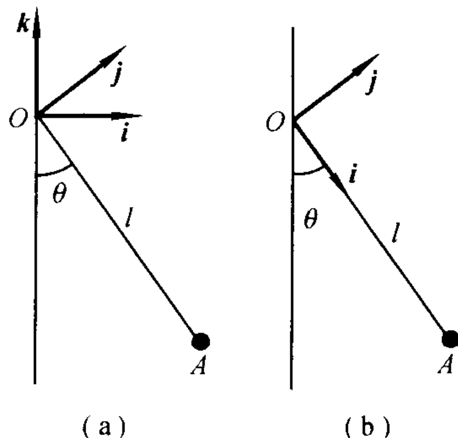


图 5.5

$$v=l\sqrt{\omega_2^2+\omega_1^2\sin^2\theta}. \tag{3}$$

图 5.5 中所选取的两组单位矢量,对 S 系来说,(a)是柱面坐标,(b)是球面坐标,两者都是固定参考系中的活动坐标. 但对 S′系来说,(a)是直角坐标,(b)是平面极坐标,前者是活动参考系中的固定坐标,后者是活动参考系中的活动坐标. 我们采用相对运动的方法解题时,一定要把参考系和坐标系分清楚. 单位矢量$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$的选取是和参考系无关的,而它们对时间的微商则和参考系有关. 不要把牵连速度$\boldsymbol{v}_{\mathrm{t}}=\boldsymbol{\omega}_0\times\boldsymbol{r}$中的$\boldsymbol{\omega}_0$与$\mathrm{d}\boldsymbol{i}/\mathrm{d}t=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{i}$或$\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{i}/\mathrm{d}t=\boldsymbol{\omega}'\times\boldsymbol{i}$中的$\boldsymbol{\omega}$和$\boldsymbol{\omega}'$混为一谈. $\boldsymbol{\omega}_0$只和参考系的选取有关,和$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$的选取无关;$\boldsymbol{\omega}$只和$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$的选取有关,和 S′是完全无关的;$\boldsymbol{\omega}'$则既和 S′的选取有关,也和$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$的选取有关. 在本题中,只要选定杆 OA 和 OB 所在的平面为活动参考系,则不论选取怎样的$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{\omega}_0$总等于$\boldsymbol{\omega}_1$. $\boldsymbol{\omega}$和$\boldsymbol{\omega}'$在(a)、(b)两种情况下不一样:

对(a)来说,
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{i},\ \frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t}=0;$$

对(b)来说,
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t}=(\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2)\times\boldsymbol{i},\ \frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{i}.$$

§5.2 非惯性系中的牛顿动力学方程 惯性力

在惯性系中,质点运动的动力学方程可由牛顿运动方程 $m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}$ 给出,这里的$\boldsymbol{a}$为质点在惯性系 S 中的加速度. 上节我们给出了不同参考系 S 和 S′之间的速度和加速度的变换关系,利用它就可以由惯性系 S 中的质点运动方程导出非惯性系 S′中的质点运动方程.

将(1.8)代入 $m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}$ 中得

$$m\left[\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{a}_0+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_0}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}_0\times(\boldsymbol{\omega}_0\times\boldsymbol{r})+2\boldsymbol{\omega}_0\times\boldsymbol{v}'\right]=\boldsymbol{F},$$

或

$$m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F} - m\left[\boldsymbol{a}_0 + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_0}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega}_0\times(\boldsymbol{\omega}_0\times\boldsymbol{r})\right] - 2m\boldsymbol{\omega}_0\times\boldsymbol{v}', \quad (2.1)$$

和惯性系中的牛顿第二定律相比,可以看到只要引入两项惯性力:

$$\boldsymbol{F}_t = -m\boldsymbol{a}_t = -m\left[\boldsymbol{a}_0 + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_0}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega}_0\times(\boldsymbol{\omega}_0\times\boldsymbol{r})\right], \quad (2.2)$$

$$\boldsymbol{F}_C = -m\boldsymbol{a}_C = -2m\boldsymbol{\omega}_0\times\boldsymbol{v}', \quad (2.3)$$

则非惯性系中的质点动力学方程将和惯性系中具有同样的形式:

$$m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_t + \boldsymbol{F}_C. \quad (2.4)$$

$\boldsymbol{F}_t$ 称为**牵连惯性力**,$\boldsymbol{F}_C$ 称为**科里奥利力**. 在等速旋转、平动加速度为零的非惯性系中,由(1.9)式得牵连惯性力为

$$\boldsymbol{F}_t = -m\boldsymbol{a}_t = m\omega_0^2\boldsymbol{R}. \quad (2.5)$$

【例】 图 5.6 是记录横向振动的地震仪的简图. 在地下室中,有一长为 l 的普通的摆. 在不发生地震时,它处于铅直的平衡位置 OM. 当发生横向地震时,将引起摆相对于地下室的摆动. 若地震的规律为简谐振动,即摆的悬挂点 A 的运动为 $OA = x_{1A} = a\sin\omega t$,求摆的运动规律.

解: 取两个参考系,Ox_1y_1 是固定不动的惯性系 S,Axy 是固结于地下室而在地震时跟随地面一起运动的非惯性系 S′. 在仪器上记录下来的是摆在 S′系中的运动规律.

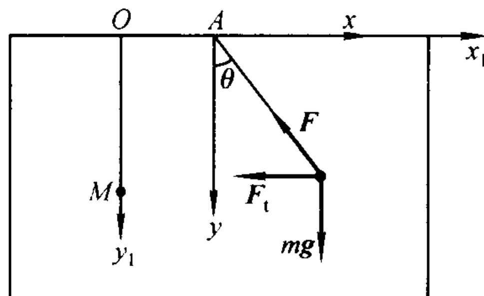


图 5.6

在 S′系中,质点 m 受到三个力:重力 mg,摆杆的约束力 F 和牵连惯性力 F_t. 取平面极坐标,$\boldsymbol{e}_\theta$ 方向的运动方程为

$$ml\ddot{\theta} = mg\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) - F_t\cos\theta.$$

将 $F_t = -m\ddot{x}_{1A} = ma\omega^2\sin\omega t$ 代入上式得

$$l\ddot{\theta} + g\sin\theta = -a\omega^2\cos\theta\sin\omega t. \quad (1)$$

上式就是摆在地下室中由于横向地震所引起的运动微分方程,通常这种振动是很小的,因此可作近似:

$$x = l\sin\theta \approx l\theta,\ \cos\theta \approx 1,$$

这样(1)式就简化为

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}x = -a\omega^2\sin\omega t. \quad (2)$$

不难看出这是一个强迫振动的微分方程,在这里重力 mg 的切线分量起了恢复力的作用,而牵连惯性力 F_t 就起了周期性干扰力的作用. 摆的固有频率为

$$\omega_c = \frac{g}{l}. \quad (3)$$

根据强迫振动的理论得摆的相对振动的振幅为

$$b=\frac{-a\omega^2}{\omega_e^2-\omega^2}=\frac{a}{1-\left(\frac{\omega_e}{\omega}\right)^2}.$$

从上式可知，欲使地震仪记录的振幅 b 和实际振幅 a 间误差很小，必须满足条件

$$\omega_e \ll \omega. \tag{4}$$

即摆的固有频率应低于地震可能有的最低频率，所以地震仪的固有频率都很低.

由(2.4)式可以很容易证明，引入惯性力 $\boldsymbol{F}_t$ 和 $\boldsymbol{F}_C$ 后，不仅牛顿第二定律的形式在非惯性系中保持不变，而且质点动量定理，角动量定理和动能定理的形式也保持不变. 例如由 $\boldsymbol{L}'=\boldsymbol{r}'\times m\boldsymbol{v}'$ 得

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{L}'}{\mathrm{d}t}=\frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}'\times m\boldsymbol{v}')=\boldsymbol{r}'\times m\boldsymbol{a}',$$

将(2.4)式代入上式即得

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{L}'}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{r}'\times(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_t+\boldsymbol{F}_C). \tag{2.6}$$

这就是非惯性系中质点的角动量定理. 类似地可以证明：

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{p}'}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_t+\boldsymbol{F}_C, \tag{2.7}$$

$$\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{T}'=(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_t+\boldsymbol{F}_C)\cdot\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{r}'. \tag{2.8}$$

它们就是非惯性系中质点的动量定理和动能定理，式中 $\boldsymbol{p}'=m\boldsymbol{v}'$ 和 $T'=\frac{1}{2}mv'^2$ 分别为非惯性系中质点的动量和动能.

§5.3 拉格朗日函数的不确定性 非惯性参考系中的拉格朗日函数

完整、保守的质点系在惯性系中的拉格朗日函数和拉格朗日方程为

$$L(q,\dot{q},t)=\sum_i\frac{1}{2}m_iv_i^2-V,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0,\quad \alpha=1,2,\cdots,s.$$

在非惯性系中，如果拉格朗日方程保持上述的形式不变，则拉格朗日函数中的 $\boldsymbol{v}_i$ 应根据两个参考系之间的速度变换关系(1.7)式进行变换. 变换后的拉格朗日函数一般不再是 $\sum_i\frac{1}{2}m_iv_i'^2-V(\boldsymbol{r}')$ 的形式，那么在非惯性参考系中的拉格朗日函数应该怎样来写呢？

为了使非惯性系中的拉格朗日函数写得比较简洁,我们先来证明一个定理:两个拉格朗日函数 L_1 和 L_2,如果只相差一个坐标 q_α 和时间 t 的函数 $f(q,t)$ 的全微商 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t$,则这两个拉格朗日函数是等价的,即拉格朗日函数准确到相差一个坐标和时间的函数的全微商. 证明如下:

设

$$L_2 = L_1 + \frac{\mathrm{d}f(q,t)}{\mathrm{d}t}, \tag{3.1}$$

我们只要证明由 L_1 和 L_2 所得出的运动方程相同即可. 为简单起见,我们假定体系只有一个广义坐标. 将(3.1)式代入上述拉格朗日方程便可看到,要证明 L_1 和 L_2 等价,只要证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right) - \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right) = 0 \tag{3.2}$$

即可. 因为 f 是 q 和 t 的函数,所以

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial q^2}\dot{q} + \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial t},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial q^2}\dot{q} + \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial t}.$$

代入(3.2)便可证明.

因此由(3.1)式所规定的 L_1 和 L_2 是等价的.

现在再来对拉格朗日函数进行变换. 我们分两步进行. 设有三个参考系,它们分别为 S、S_1 和 S′. S 为惯性系,S_1 为相对于 S 以速度 $\boldsymbol{v}_0(t)$ 作平动的参考系,S′和 S_1 有共同的原点,但相对于 S_1 以角速度 $\boldsymbol{\omega}_0(t)$ 转动. 这样 S′相对 S 既有平动,又有转动,如图 5.7 所示.

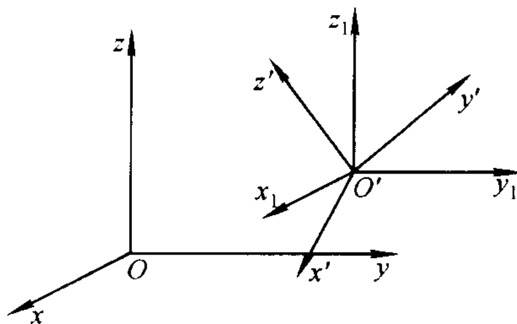


图 5.7

设粒子在 S 系中的速度为 $\boldsymbol{v}$,在 S_1 中的速度为 $\boldsymbol{v}_1$,则

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_0(t).$$

所以 S 系中单粒子的拉格朗日函数可表示为

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_0)^2 - V \\ &= \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 + m\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_0 - V. \end{aligned} \tag{3.3}$$

因 $v_0^2(t)$是已知的函数,我们总可以把它写成为 $\mathrm{d}f(q,t)/\mathrm{d}t$ 的形式,因此可以从(3.3)式中去掉. 此外$\boldsymbol{v}_1=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t}$,其中 $\boldsymbol{r}_1$ 为 S_1 系中粒子的位置矢量,因此(3.3)式中第三项可改写为

$$m\,\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{v}_0)-m\boldsymbol{r}_1\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_0}{\mathrm{d}t}.$$

将此式代入(3.3)式,再次去掉$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{v}_0)$项,最后得到

$$L=L_1=\frac{1}{2}mv_1^2-m\boldsymbol{r}_1\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_0}{\mathrm{d}t}-V. \tag{3.4}$$

这就是用平动参考系中的位置 $\boldsymbol{r}_1$ 和速度$\boldsymbol{v}_1$来表示惯性系中的拉格朗日函数的一般形式.

现在再将 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_1$用 S′系中的 $\boldsymbol{r}'$和$\boldsymbol{v}'$来表示. 粒子在 S′中的$\boldsymbol{v}'$和$\boldsymbol{v}$ 的关系为

$$\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{\omega}_0\times\boldsymbol{r}'.$$

将此式代入(3.4)式,注意到 S_1 系和 S′系中粒子的位置矢量 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}'$是相同的,于是得

$$L=L'=\frac{1}{2}mv'^2+m\,\boldsymbol{v}'\cdot(\boldsymbol{\omega}_0\times\boldsymbol{r}')+$$

$$\frac{1}{2}m(\boldsymbol{\omega}_0\times\boldsymbol{r}')^2-m\boldsymbol{r}'\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_0}{\mathrm{d}t}-V. \tag{3.5}$$

这就是用任意的非惯性系 S′中的位置 $\boldsymbol{r}'$和速度$\boldsymbol{v}'$来表示惯性系中自由粒子的拉格朗日函数的一般形式. 它比 $L=\frac{1}{2}m(\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{\omega}_0\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{v}')^2-V$ 要简单一些,但又不是$\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}'^2-V$. 拉格朗日方程仍保持原来的形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial\boldsymbol{v}'}-\frac{\partial L'}{\partial\boldsymbol{r}'}=0$$

不变. 由于拉格朗日函数是标量,广义坐标和广义速度也都是标量$\left(\text{上式中的}\right.$ $\frac{\partial L'}{\partial\boldsymbol{v}'}$和$\frac{\partial L'}{\partial\boldsymbol{r}'}$只是一种简写,并不意味着它们是矢量$\left.\right)$,而$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$和$\frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}$对标量的作用是一样的,因此上式又可写成

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L'}{\partial\boldsymbol{v}'}\right)-\frac{\partial L'}{\partial\boldsymbol{r}'}=0. \tag{3.6}$$

(3.5)和(3.6)合起来就是非惯性系中拉格朗日形式的动力学方程.

【例 1】 在非惯性系中由拉格朗日方程导出单粒子的牛顿运动方程.

解：由(3.5)式得

$$\frac{\partial L'}{\partial \boldsymbol{v}'} = m\boldsymbol{v}' + m(\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{r}'), \tag{1}$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \boldsymbol{r}'} = -m\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{v}' - m\boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{r}') - m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_0}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}'}. \tag{2}$$

将(1)、(2)式代入(3.6)式，化成标量形式，再经过整理得：

$$\begin{aligned} m\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}'} - m\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_0}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_0}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{r}' + \right. \\ &\left. \boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{r}')\right] - 2m(\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{v}') \\ &= \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a}_t - m\boldsymbol{a}_C, \end{aligned}$$

和上节所得出的结果相同.

【例 2】 质量为 m 的小环 M，套在半径为 R 的光滑圆圈上，并可沿着圆圈滑动. 如圆圈在水平面内以角速度 ω_1 绕圆圈上某点 O 转动，求小环沿圆周的运动微分方程.

解：如图 5.8 所示，取两个坐标系 Oxy 和 $O'x'y'$，O'为圆圈的中心，$O'x'y'$是固定在圆圈上的. 小环 M 对 Oxy 的运动是绝对运动，对 $O'x'y'$是相对运动. 我们可用两种不同的观点来处理问题：

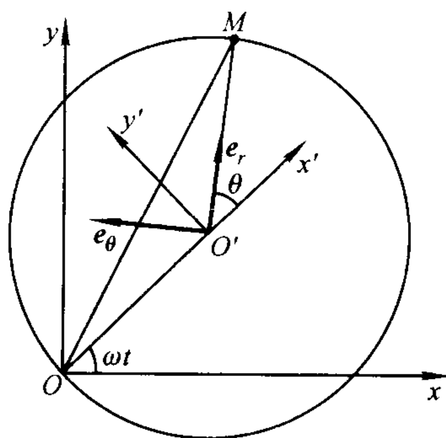


图 5.8

(1) 站在圆圈上来看问题，把 $O'x'y'$看作活动参考系，取 θ 为广义坐标，则体系的拉格朗日方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L'}{\partial \theta} = 0, \tag{1}$$

拉格朗日函数与(3.5)式相同

$$\begin{aligned} L' = \frac{1}{2}mv'^2 + m\boldsymbol{v}' \cdot (\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{r}') + \\ \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{r}')^2 - m\boldsymbol{r}' \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_0}{\mathrm{d}t}. \end{aligned} \tag{2}$$

其中

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \omega_1 \boldsymbol{k}, \ \boldsymbol{r}' = R\boldsymbol{e}_r,$$

$$\boldsymbol{v}' = \frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}' = \frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}(R\boldsymbol{e}_r) = R\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta,$$

$$\boldsymbol{v}_0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\overrightarrow{OO'}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R\boldsymbol{i}) = R\omega_1\boldsymbol{j},$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_0}{\mathrm{d}t} = -R\omega_1^2\boldsymbol{i}.$$

将它们代入(2)得

$$L' = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + 2\dot{\theta}\omega_1 + \omega_1^2 + 2\omega_1^2\cos\theta). \tag{3}$$

将上式代入(1)得

$$\ddot{\theta} + \omega_1^2 \sin\theta = 0. \tag{4}$$

这就是小环 M 的运动方程.

(2) 我们也可以站在惯性系 Oxy 上来看这个问题,这时可把 $O'x'y'$ 看作为一个活动坐标系,体系的拉格朗日方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0, \tag{5}$$

拉格朗日函数为

$$L=\frac{1}{2}mv^2. \tag{6}$$

其中

$$\begin{aligned}v&=\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{OM}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'M})\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R\boldsymbol{i})+\left(\frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}_0\times\right)R\boldsymbol{e}_r\\&=R\omega_1\boldsymbol{j}+R\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta+R\omega_1\boldsymbol{e}_\theta.\end{aligned} \tag{7}$$

将(7)式代入(6)式得

$$\begin{aligned}L&=\frac{1}{2}mR^2[\omega_1\boldsymbol{j}+(\dot{\theta}+\omega_1)\boldsymbol{e}_\theta]^2\\&=\frac{1}{2}mR^2[2\omega_1^2+\dot{\theta}^2+2(\omega_1+\dot{\theta})\omega_1\cos\theta+2\dot{\theta}\omega_1].\end{aligned} \tag{8}$$

将(8)式代入(5)式,经过整理后得到和(4)式相同的方程.

从上面两种不同的处理方法中可以看到,只要广义坐标选取得相同,不论用哪种方法,所得到的运动方程是相同的,但拉格朗日函数(3)和(8)则可以不一样. 这是因为拉格朗日函数可以相差一个广义坐标和时间的函数的全微商,(8)式和(3)式相差的项正是这种形式的项.

*§5.4 地球自转的动力学效应

地球不是一个严格的惯性系. 地球自转的角速度为

$$\omega_0=\frac{2\pi}{24\times3\,600}\ \mathrm{s}^{-1}\approx7.29\times10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}.$$

地球的半径为 $R=6.37\times10^6$ m. 因此由于地球自转所引起的向心加速度

$$a_t\leqslant\omega_0^2R=0.033\,8\ \mathrm{m/s^2}=3\times10^{-3}g.$$

式中 g 为重力加速度. 因此在 g 起作用的问题中,如果计算精度达到 10^{-3} 量级时,必须考虑重力加速度的这一修正. 由于地球自转所引起的科里奥利加速度为

$$a_C\leqslant2\omega_0v,$$

由此引起的线偏离和角偏离分别为

$$\Delta s\leqslant\frac{1}{2}a_Ct^2=\omega_0vt^2,$$

$$\Delta\theta=\frac{\Delta s}{vt}\leqslant\omega_0 t.$$

对于短时间的运动,因 $\omega_0\approx10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$,这一效应可以忽略. 但对长时间的运动,这一效应就不能忽略了.

地球公转的角速度为地球自转角速度的 1/365. 地球离太阳的距离与地球半径之比为$\frac{1}{4}\times10^5$. 因此,地球公转的向心力与地球自转的向心力之比为

$$\left(\frac{1}{365}\right)^2\times\frac{1}{4}\times10^5\approx0.2,$$

科里奥利力之比为$\frac{1}{365}\approx0.03$. 因此由于地球公转所引起的非惯性效应比起地球自转的非惯性效应要小 1~2 个数量级,一般均可忽略. 本节我们讨论地球自转的非惯性效应的一些重要例子.

(1) 重力加速度 g 随纬度 λ 的变化

在纬度为 λ 处,地面上质量为 m 的物体,对于地面上的观察者来说,受到两个力:地球的引力 $\boldsymbol{F}$ 和惯性离心力 $\boldsymbol{F}_t$. 实际所观察到的重力 $m\boldsymbol{g}$ 是 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{F}_t$ 的合力:

$$m\boldsymbol{g}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_t.$$

如果认为地球是均匀的刚性球体,则 $\boldsymbol{F}$ 的值各地相同. 但 $\boldsymbol{F}_t$ 的值随纬度 λ 而变,

$$F_t = mR\omega_0^2\cos\lambda, \tag{4.1}$$

式中 R 为地球半径. 因此 $m\boldsymbol{g}$ 的大小和方向都随纬度 λ 而变,大小的变化反映在重力加速度 g 随 λ 的变化,方向的变化反映在 $m\boldsymbol{g}$ 的方向(即铅直方向)和引力 $\boldsymbol{F}$ 方向(即地球半径方向)之间的夹角 α 随 λ 的变化. 下面我们来找出 g 和 α 随 λ 而变化的函数关系.

将 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}_t$ 和 $m\boldsymbol{g}$ 之间的关系用图 5.10 的三角形来表示. 从图中可看出:

$$F_t\sin\lambda = mg\sin\alpha, \tag{4.2}$$

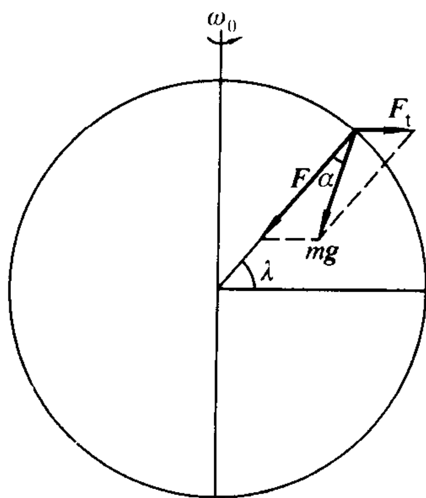


图 5.9

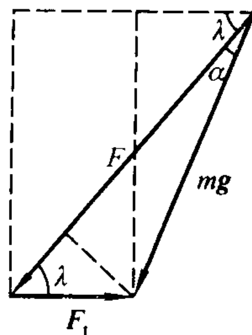


图 5.10

$$F\sin\lambda = mg\sin(\lambda+\alpha), \tag{4.3}$$

$$F = mg\cos\alpha + F_t\cos\lambda, \tag{4.4}$$

将(4.1)式代入(4.2)式得

$$\sin\alpha = \frac{R\omega_0^2\sin 2\lambda}{2g}. \tag{4.5}$$

从上式可以看出，α 的值在纬度 45°处最大．如果我们把 $\lambda=45°$处实测的 $g=9.806\ 2\ \mathrm{m/s^2}$ 的值和 ω_0 及 R 的值代入上式，可算得

$$\alpha_{\max} \approx \frac{\omega_0^2 R}{2g} = 6'. \tag{4.6}$$

所以偏角 α 是很小的，当 ω_0 是一级小量时，α 是二级小量．

在赤道处，$\lambda=\alpha=0$，由(4.1)式和(4.4)式得

$$F = m(g_0 + R\omega_0^2). \tag{4.7}$$

式中 g_0 是赤道地区的重力加速度．将(4.7)式代入(4.3)式得

$$g = \frac{(g_0 + R\omega_0^2)\sin\lambda}{\sin\lambda\cos\alpha + \cos\lambda\sin\alpha}. \tag{4.8}$$

将(4.8)和(4.5)两式联立可解得 g 和 α 为 λ 的函数，但这样解出来的 $g(\lambda)$ 和 $\alpha(\lambda)$ 将是很复杂的函数．下面我们作一些近似．首先将(4.5)式中的 g 用 g_0 来代替，即

$$\sin\alpha \approx \alpha \approx \frac{R\omega_0^2}{2g_0}\sin 2\lambda. \tag{4.9}$$

然后将(4.9)式代入(4.8)式，并取 $\cos\alpha\approx 1$，得

$$\begin{aligned} g &\approx \frac{(g_0+R\omega_0^2)\sin\lambda}{\sin\lambda + \cos\lambda\dfrac{R\omega_0^2}{2g_0}\sin 2\lambda} = \frac{g_0+R\omega_0^2}{1+\dfrac{R\omega_0^2\cos^2\lambda}{g_0}} \\ &\approx (g_0+R\omega_0^2)\left(1-\frac{R\omega_0^2\cos^2\lambda}{g_0}\right) \\ &\approx g_0\left(1+\frac{\omega_0^2 R}{g_0}\sin^2\lambda\right). \end{aligned} \tag{4.10}$$

(4.10)和(4.9)就是 g 和 α 随 λ 改变的近似公式．如果我们把 $\lambda=45°$时的 $g=9.806\ 2\ \mathrm{m/s^2}$ 及 ω_0 和 R 的值代入(4.10)式，则可得出 $g_0=9.780\ 3\ \mathrm{m/s^2}$．于是我们得 g 的近似公式为

$$g = 9.780\ 3(1+0.005\ 3\sin^2\lambda)\ \mathrm{m/s^2}. \tag{4.11}$$

根据上式所算得 g 的变化如下表所示：

λ	0°	10°	20°	30°	40°
$g/(\mathrm{m/s^2})$	9.780 3	9.781 9	9.786 3	9.793 2	9.801 7
λ	50°	60°	70°	80°	90°
$g/(\mathrm{m/s^2})$	9.810 7	9.819 1	9.826 1	9.830 6	9.832 1

地球不是一个严格的球体,两极半径小,赤道半径大.这使 g 随纬度的升高而增大的效应更显著,但比自转的影响要小.由于这个原因,各地实测的 g 值比由(4.11)式所计算的值一般要大一些,如果把两个因素都考虑进去,就可以得到一个计算 g 的更精确的公式.

(2) 落体偏东

考虑到地球自转角速度 ω_0 是一个小量,略去 ω_0 的平方项,得质点相对于地球的运动方程为

$$m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F} - 2m\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{v}'. \quad (4.12)$$

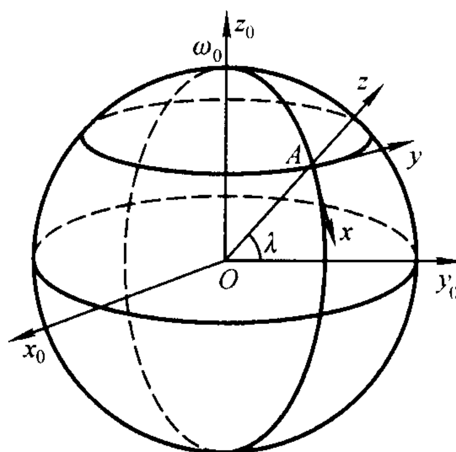


图 5.11

取固定在地球上的参考系 $Axyz$,x 轴向南,y 轴向东,z 轴垂直地面向上,如图 5.11 所示.由于我们只保留 ω_0 的一级效应,因此重力方向和 z 轴平行.而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_0 &= \omega_0 \boldsymbol{e}_3 \\ &= \omega_0(-\cos\lambda \boldsymbol{i} + \sin\lambda \boldsymbol{k}),\end{aligned} \quad (4.13)$$

式中 λ 为 A 点的纬度.将(4.13)式代入(4.12)式得

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x + 2m\omega_0\dot{y}\sin\lambda, \\ m\ddot{y} = F_y - 2m\omega_0(\dot{x}\sin\lambda + \dot{z}\cos\lambda), \\ m\ddot{z} = F_z + 2m\omega_0\dot{y}\cos\lambda. \end{cases} \quad (4.14)$$

如果质点从有限高度 h 以初速 $v'=0$ 自由下落,不考虑阻力等其他力的作用,重力 mg 看成常数,则对(4.14)式积分可得

$$\begin{cases} \dot{x} = 2\omega_0 y\sin\lambda, \\ \dot{y} = -2\omega_0[x\sin\lambda + (z-h)\cos\lambda], \\ \dot{z} = -gt + 2\omega_0 y\cos\lambda. \end{cases} \quad (4.15)$$

将(4.15)式代入(4.14)式,继续略去 ω_0^2 项,只保留到 ω_0 的一级项,得

$$\begin{cases}\ddot{x}=0,\\ \ddot{y}=2gt\omega_0\cos\lambda,\\ \ddot{z}=-g.\end{cases}\tag{4.16}$$

再积分两次得

$$\begin{cases}x=0,\\ y=\frac{1}{3}gt^3\omega_0\cos\lambda,\\ z=h-\frac{1}{2}gt^2.\end{cases}\tag{4.17}$$

消去 t 得落体的轨道方程为

$$y^2=-\frac{8}{9}\frac{\omega_0^2\cos^2\lambda}{g}(z-h)^3.\tag{4.18}$$

这是位于东西铅直面内的半三次抛物线. 当落体到达地面时 $z=0$,由(4.18)式可得落体偏东的数值为

$$y=\frac{2\sqrt{2}}{3}\omega_0 h\sqrt{\frac{h}{g}}\cos\lambda.\tag{4.19}$$

落体偏东效应已被许多实验所证实.

(3) 傅科摆

假如在北极悬挂一摆,使之作微振动,在惯性系中的观察者看来摆的振动面始终在铅直平面内. 考虑到地球以角速度 $\boldsymbol{\omega}_0$ 自转,因此在非惯性系的地球上的观察者看来,摆的振动面以角速度 $-\boldsymbol{\omega}_0$ 转动. 这是傅科(Foucault)在1860年首先指出的,借此可以直接证实地球是具有自转的. 除了在赤道以外,其他各地都可观察到这种效应,但在两极地区这种效应最显著,下面对这个问题作一近似分析.

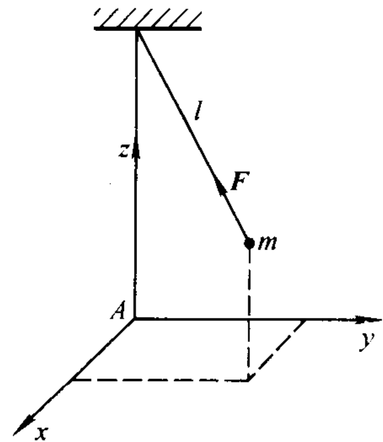


图 5.12

设摆长为 l,摆锤的质量为 m,摆杆的张力为 F,取和上例相同的坐标系 $Axyz$,A 点为摆锤平衡时的位置,则张力 F 的三个分量为

$$\begin{cases}F_x=-\frac{x}{l}F,\\ F_y=-\frac{y}{l}F,\\ F_z=\frac{l-z}{l}F,\end{cases}\tag{4.20}$$

将它代入(4.12)式得摆的运动方程为

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\dfrac{x}{l}F + 2m\omega_0\dot{y}\sin\lambda, \\ m\ddot{y} = -\dfrac{y}{l}F - 2m\omega_0(\dot{x}\sin\lambda + \dot{z}\cos\lambda), \\ m\ddot{z} = \dfrac{l-z}{l}F - mg + 2m\omega_0\dot{y}\cos\lambda. \end{cases} \tag{4.21}$$

外加一个约束方程

$$x^2 + y^2 + (l-z)^2 = l^2. \tag{4.22}$$

解这四个联立方程,即可得出摆的运动规律. 但这一组方程很难严格求解. 考虑到微振动的条件下 x、y 和 $\dot{x}$、$\dot{y}$ 都是小量. 计算中只需保留到一级小量,因而由(4.22)得

$$\begin{aligned} l - z &= \sqrt{l^2 - (x^2 + y^2)} \\ &= l\left(1 - \frac{x^2+y^2}{2l^2} + \cdots\right). \end{aligned}$$

因此,z 是二级小量,$\dot{z}$ 和 $\ddot{z}$ 也是二级小量. 在忽略二级小量的情况下由(4.21)中的第三个方程可得 $F = mg$,代入另两个方程得:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\omega_0\dot{y}\sin\lambda + \omega^2 x = 0, \\ \ddot{y} + 2\omega_0\dot{x}\sin\lambda + \omega^2 y = 0, \end{cases} \tag{4.23}$$

式中 $\omega^2 = g/l$. 用 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$乘上面的第二式,然后再与第一式相加,得一个复变数方程

$$\ddot{\xi} + \mathrm{i}2\omega_0\dot{\xi}\sin\lambda + \omega^2\xi = 0, \tag{4.24}$$

其中

$$\xi = x + \mathrm{i}y.$$

方程(4.24)的通解为

$$\xi = A\mathrm{e}^{n_1 t} + B\mathrm{e}^{n_2 t}, \tag{4.25}$$

其中 A、B 为两个复常数,由初始条件决定. n_1 和 n_2 为特征方程

$$n^2 + \mathrm{i}(2\omega_0\sin\lambda)n + \omega^2 = 0$$

的两个根:

$$\begin{cases} n_1 = -\mathrm{i}\omega_0\sin\lambda + \mathrm{i}\sqrt{\omega_0^2\sin^2\lambda + \omega^2} \approx -\mathrm{i}\omega_0\sin\lambda + \mathrm{i}\omega, \\ n_2 = -\mathrm{i}\omega_0\sin\lambda - \mathrm{i}\sqrt{\omega_0^2\sin^2\lambda + \omega^2} \approx -\mathrm{i}\omega_0\sin\lambda - \mathrm{i}\omega. \end{cases} \tag{4.26}$$

将(4.26)式代入(4.25)式得

$$\xi = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_0\sin\lambda)t}(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}). \tag{4.27}$$

当地球没有自转，即 $\omega_0=0$ 时，由(4.27)得

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_1 = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\\ &=(A+B)\cos\omega t+\mathrm{i}(A-B)\sin\omega t=x'+\mathrm{i}y'.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases}x'=(A+B)\cos\omega t,\\ y'=(A-B)\sin\omega t.\end{cases}\tag{4.28}$$

上式表示当地球自转效应忽略时，摆锤走一椭圆轨道，x'和y'分别为椭圆的两个主轴．当 $\omega_0\neq 0$，即考虑了地球的自转效应时，由(4.27)式得

$$\begin{aligned}\xi &= x+\mathrm{i}y=[\cos(\omega_0 t\sin\lambda)-\mathrm{i}\sin(\omega_0 t\sin\lambda)](x'+\mathrm{i}y')\\ &=[x'\cos(\omega_0 t\sin\lambda)+y'\sin(\omega_0 t\sin\lambda)]+\\ &\quad\ \mathrm{i}[-x'\sin(\omega_0 t\sin\lambda)+y'\cos(\omega_0 t\sin\lambda)].\end{aligned}\tag{4.29}$$

所以

$$\begin{cases}x=x'\cos(\omega_0 t\sin\lambda)+y'\sin(\omega_0 t\sin\lambda),\\ y=-x'\sin(\omega_0 t\sin\lambda)+y'\cos(\omega_0 t\sin\lambda).\end{cases}\tag{4.30}$$

这表明摆锤平面作周期为

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

轨道为椭圆．另一方面此椭圆的轴 x'和y'又以角速度 $-\omega_0\sin\lambda$ 绕 Oz 轴转动，亦即摆的振动面以角速度 $-\omega_0\sin\lambda$ 旋转，它们的几何关系如图 5.13 所示．

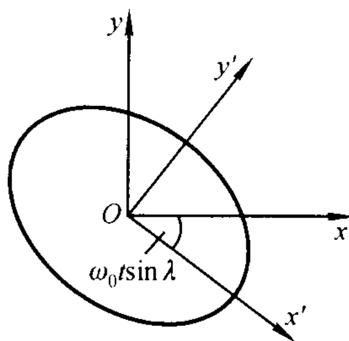


图 5.13

1851 年傅科在巴黎作了第一次这样的实验，他所用的摆长 $l=67$ m，摆锤重 28 kg，巴黎的纬度为 49°，$\sin\lambda\approx 0.75$，摆锤所走的椭圆长轴为 3 m，摆的周期为 16 s，而椭圆旋转的周期则为 32 h.

**§5.5 拉莫尔进动 经典力学对磁共振现象的解释

带电粒子作旋转运动时，除了机械角动量 $\boldsymbol{L}$ 外，同时必有磁矩 $\boldsymbol{\mu}$ 存在，两者之间的关系表示为

$$\boldsymbol{\mu}=\gamma\boldsymbol{L},\tag{5.1}$$

式中

$$\gamma=\frac{\mu}{L},\tag{5.2}$$

称为**旋磁比**. 当 γ 为正时, $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\boldsymbol{L}$ 的方向相同; γ 为负时, $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\boldsymbol{L}$ 的方向相反. 下面我们以电子作圆轨道运动为例对这种关系作一说明.

根据磁矩的定义,电子轨道运动的磁矩 μ_l 为

$$\mu_l = IS, \tag{5.3}$$

式中 I 是电子运动时所产生的电流, S 为电流所围面积. 设电子作半径为 R 的圆周运动,其角速度为 ω,则

$$I = -\frac{\omega}{2\pi}e,\ S = \pi R^2,$$

式中 $(-e)$ 为电子电荷. 将它们代入(5.3)式得

$$\mu_l = -\frac{e}{2}\omega R^2. \tag{5.4}$$

电子绕半径为 R 的圆周运动时的机械角动量 L_l 为

$$L_l = |\boldsymbol{r} \times m_e \boldsymbol{v}| = m_e \omega R^2, \tag{5.5}$$

式中 m_e 为电子质量. 比较(5.4)和(5.5)两式,并考虑到电子带负电,它的运动方向和电流方向相反,即得

$$\mu_l = -\frac{e}{2m_e}L. \tag{5.6}$$

所以电子轨道运动的旋磁比为

$$\gamma_e = -\frac{e}{2m_e}. \tag{5.7}$$

从电磁学中我们知道,磁矩为 $\boldsymbol{\mu}$ 的粒子在磁场 $\boldsymbol{B}$ 中将受到一个力矩

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{B} \tag{5.8}$$

的作用. 因此将(5.1)式代入角动量定理得磁矩为 $\boldsymbol{\mu}$ 的粒子的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \gamma \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B} = -\gamma \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{L}, \tag{5.9}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}}{\mathrm{d}t} = -\gamma \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{\mu}. \tag{5.10}$$

我们以前曾指出,常模矢量 $\boldsymbol{A}$ 对时间的微商可表示为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{A},$$

式中 $\boldsymbol{\omega}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 转动的角速度. 将它和(5.9)、(5.10)式比较,可知 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{\mu}$ 均为常模矢量,在磁场 $\boldsymbol{B}$ 的作用下, $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{\mu}$ 的大小都不变,但其方向则以角速度

$$\boldsymbol{\omega} = -\gamma \boldsymbol{B} \tag{5.11}$$

绕磁场 $\boldsymbol{B}$ 作进动. 当 $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\boldsymbol{L}$ 的方向相同时(γ 为正,如质子), $\boldsymbol{\omega}$ 的方向和 $\boldsymbol{B}$ 方向相反,如图 5.14(a)所示;当 $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\boldsymbol{L}$ 的方向相反时(γ 为负,如电子), $\boldsymbol{\omega}$ 的方向和 $\boldsymbol{B}$ 方向相同,如图 5.14(b)所示. $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\boldsymbol{L}$ 的这种运动是由拉莫尔首先发现的,所以这种运动称为**拉莫尔**(Larmor)**进动**, $\boldsymbol{\omega}$ 称为**拉莫尔频率**.

拉莫尔进动可用来定性地解释**磁共振**(**顺磁共振**和**核磁共振**)**现象**. 磁共振是这样一种现象:总角动量不为零的原子或自旋不为零的原子核,在恒定外磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 中,如在垂直 $\boldsymbol{B}_0$ 的

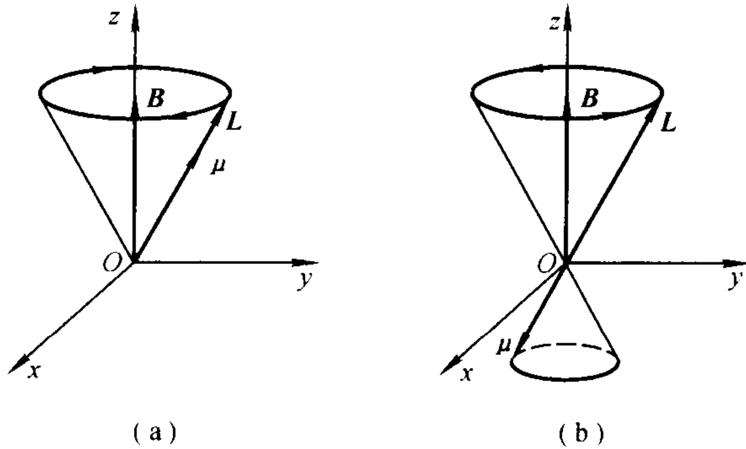


图 5.14

方向上再加上一个弱的交变磁场 $\boldsymbol{B}'$,则当 $\boldsymbol{B}'$的频率 ν 和 B_0 满足条件

$$\begin{cases} h\nu = g\mu_{\mathrm{B}}B_0\text{,顺磁共振,} \\ h\nu = g_{\mathrm{N}}\mu_{\mathrm{N}}B_0\text{,核磁共振} \end{cases} \tag{5.12}$$

时,将发生共振而大量吸收能量. 式中 $\mu_{\mathrm{B}} = eh/2m_{\mathrm{e}}$ 是**玻尔**(Bohr)**磁子**,$\mu_{\mathrm{N}} = eh/2m_{\mathrm{p}}$ 是**核磁子**,g 和 g_{N} 称为**朗德**(Landé)**因子**,视不同的原子和原子核而异. 下面我们从经典力学角度来讨论一下这个问题.

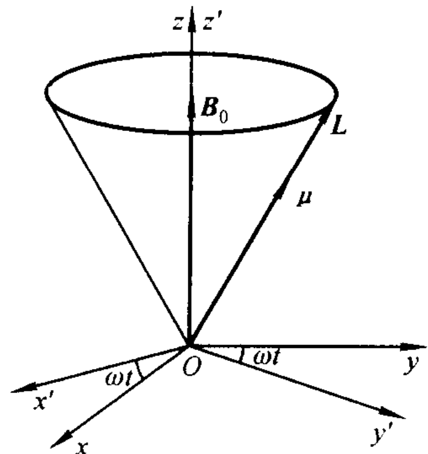


图 5.15

如图 5.15 所示,设 $Oxyz$ 是空间固定坐标系,Oz 轴的方向为外磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 的方向. 设粒子的磁矩方向和角动量方向一致,根据拉莫尔进动理论,磁矩 $\boldsymbol{\mu}$ 将以角速度

$$\boldsymbol{\omega}^0 = -\gamma\boldsymbol{B}_0 = -\omega_{\mathrm{L}}^0\boldsymbol{k} \tag{5.13}$$

绕 Oz 轴作进动,$\omega_{\mathrm{L}}^0 = \gamma B_0$.

现在我们在垂直 $\boldsymbol{B}_0$ 的方向(设为 Ox 轴方向)加一交变磁场:

$$\boldsymbol{B}' = 2B_1\cos\omega t\boldsymbol{i}. \tag{5.14}$$

这个交变磁场可看成是两个大小相等,一个左旋,一个右旋的圆偏振磁场 $\boldsymbol{B}_1$ 和 $\boldsymbol{B}_2$ 的叠加(图 5.16):

$$\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2,$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{B}_1 = B_1\cos\omega t\boldsymbol{i} - B_1\sin\omega t\boldsymbol{j}, \\ \boldsymbol{B}_2 = B_1\cos\omega t\boldsymbol{i} + B_1\sin\omega t\boldsymbol{j}. \end{cases} \tag{5.15}$$

$\boldsymbol{B}_1$ 的旋转方面和磁矩 $\boldsymbol{\mu}$ 的进动方向相同,$\boldsymbol{B}_2$ 则相反. 现在我们暂不考虑 $\boldsymbol{B}_2$,只看附加了 $\boldsymbol{B}_1$ 后所出现的新情况.

在 $Oxyz$ 系中看来,根据拉莫尔进动的理论,此时磁矩 $\boldsymbol{\mu}$ 不再绕 $\boldsymbol{B}_0$ 作进动,而是绕

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{e}} = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_1$$

作拉莫尔进动. 由于 $\boldsymbol{B}_e$ 的方向是不断变化的,故很难直观地看出 $\boldsymbol{\mu}$ 究竟是怎样运动的.

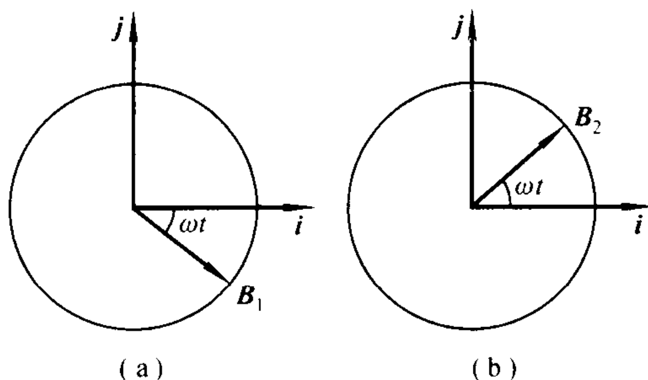


图 5.16

现在我们取图 5.15 中的另一个参考系 $Ox'y'z'$,其中 Oz' 轴和 Oz 重合,Ox' 轴以角速度

$$\boldsymbol{\omega} = -\omega \boldsymbol{k} \tag{5.16}$$

绕 Oz 轴旋转. 在 $Ox'y'z'$ 系中,磁矩 $\boldsymbol{\mu}$ 所受到的总外场为

$$\boldsymbol{B}_e = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_1 = B_0 \boldsymbol{k}' + B_1 \boldsymbol{i}'. \tag{5.17}$$

在惯性系 $Oxyz$ 中,磁矩 $\boldsymbol{\mu}$ 的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}}{\mathrm{d}t} = -\gamma \boldsymbol{B}_e \times \boldsymbol{\mu}.$$

利用

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega} \times ,$$

得磁矩 $\boldsymbol{\mu}$ 在 $Ox'y'z'$ 系中的运动方程为

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{\mu}}{\mathrm{d}t} = -\gamma \boldsymbol{B}'_e \times \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\omega}'_L \times \boldsymbol{\mu}, \tag{5.18}$$

其中

$$\boldsymbol{B}'_e = \left(B_0 - \frac{\omega}{\gamma}\right)\boldsymbol{k}' + B_1 \boldsymbol{i}' = \frac{1}{\gamma}(\omega_L^0 - \omega)\boldsymbol{k}' + B_1 \boldsymbol{i}'. \tag{5.19}$$

(5.18)式中的 ω'_L 为 $Ox'y'z'$ 系中新的拉莫尔进动频率,其大小为

$$\omega_L'^2 = (\omega_L^0 - \omega)^2 + (\gamma B_1)^2. \tag{5.20}$$

下面我们分几种情况对这一结果作讨论.

(1) 若 $B_1 = 0, \omega = \omega_L^0$,即没有附加磁场,且 $Ox'y'z'$ 系以原拉莫尔频率 ω_L^0 作旋转. 这时由(5.19)式得 $\boldsymbol{B}'_e = 0$,它表明在 $Ox'y'z'$ 系中磁矩 $\boldsymbol{\mu}$ 不会发生进动,其方向是固定不变的. 我们不妨假定 $\boldsymbol{\mu}$ 在 $Oy'z'$ 平面内,于是 $\boldsymbol{\mu}$ 将跟着 $Oy'z'$ 平面一起转动,并且与 Oz' 轴的夹角 θ 不变. 从 $Oxyz$ 系中看这一现象,就是 $\boldsymbol{\mu}$ 以角速度 $-\omega_L^0 \boldsymbol{k}$ 在作进动. 磁矩 $\boldsymbol{\mu}$ 在磁场 $\boldsymbol{B}$ 中的势能为

$$V = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B} = -\mu B \cos\theta,$$

即然 $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的夹角 θ 不变,所以体系的能量也不变.

(2) 若 $B_1 \neq 0, \omega = \omega_L^0$. 这时由(5.19)式得 $\boldsymbol{B}'_e = B_1 \boldsymbol{i}'$. 这表示在 $Ox'y'z'$ 系中,$\boldsymbol{\mu}$ 将绕 Ox' 轴作进动,它使 $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\boldsymbol{B}_0$ 的夹角增大,从而使体系的能量增大. 由于 $B_1 \ll B_0$,进动十分缓

慢,因此能量吸收过程可持续进行. 这就是上面所说的磁共振现象. 用 $\hbar = h/2\pi$ 乘 $\omega = \omega_L^0$ 两边,即可得到频率条件(5.12).

(3) 若 $B_1 \neq 0$,但 $\omega \neq \omega_L^0$. 这时由(5.19)式知 $\boldsymbol{B}'_e$ 并不在 Ox' 轴方向,因而 $\boldsymbol{\mu}$ 将不是绕 Ox' 轴作进动,因此 $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\boldsymbol{B}_0$ 间的夹角 θ 随时间增加和减少交替出现,从而粒子的能量也是增加和减少交替出现. 因为 $\boldsymbol{B}_1$ 的频率极高,因此平均来说观察不到能量的吸收,共振现象不可能出现.

上面我们只讨论了 $\boldsymbol{B}_1$ 的作用,现在再来看 $\boldsymbol{B}_2$ 的作用. $\boldsymbol{B}_2$ 的旋转方向和 ω_L^0 的方向相反,因此在满足频率条件 $\omega = \omega_L^0$ 时,由(5.19)式,$\boldsymbol{B}'_e$ 将是

$$\boldsymbol{B}'_e = \frac{2}{\gamma}\omega_L^0 \boldsymbol{k}' + B_1 \boldsymbol{i}',$$

不可能在 Ox' 轴方向,它和情况(3)一样,平均效应为零,可以不必考虑.

以上是从经典力学的角度来讨论单个粒子的磁共振现象的. 实际问题中样品总是由大量粒子组成的,必须考虑统计规律性. 并且对于原子领域的问题,经典力学应由量子力学取代,所以上述理论只是一种定性的近似理论.

习　　题

5.1　分别用质点运动学、刚体运动学和相对运动学方法求§5.1例2中质点 A 的速度,每一种方法又分别用直角坐标、柱坐标和球坐标三种坐标的单位矢量表示.

5.2　在上题中,选一种你认为最方便的单位矢量,用相对运动学的方法求质点 A 的加速度.

5.3　半径为 R 的圆周在自身平面内以角速度 ω 绕圆周上一固定点 C 沿逆时针方向转动,一质点 M 在此圆周上以相对速度 $2R\omega$ 沿顺时针方向运动. 开始时质点 M 和 C 点在同一直径的两端. 求质点 M 的绝对速度、绝对加速度和轨迹.

5.4　螺旋桨飞机在空中以速率 v 沿半径为 R 的水平圆形轨道转弯,求螺旋桨和铅垂轴成 θ 角的位置时,螺旋桨端点的速度和加速度. 已知螺旋桨长为 l,自转角速度为 ω.

5.5　质量为 m 的质点位于光滑水平面上,此平面以角速度 ω 绕过平面上 O 点的铅直轴转动. 设质点受 O 点的吸引,引力为 $\boldsymbol{F} = -m\omega^2 \boldsymbol{r}$,$\boldsymbol{r}$ 为质点相对于 O 点的矢径,证明在任何起始条件下,质点以角速度 2ω 作圆周运动.

5.6　一光滑平面以角速度 ω 绕过此平面上 O 点的一固定轴旋转,轴与此平面垂直. 有一质量为 m 的质点 B,在此平面内受到 A 点的吸引,A 与 O 的距离为 d,吸引力与质点到力心 A 点的距离 AB 成正比,比例常数为 $4\omega^2 m$. 证明:如当 $t=0$ 时,质点自离 O 点 $\frac{8}{3}d$ 处以初速度 $\frac{4}{3}d\omega$ 垂直于 OB 发射,则质点相对于平面作圆周运动,并求质点相对于固定坐标的轨迹.

5.7　一半径为 R 的圆环以角速度 $\sqrt{\frac{ng}{R}}$ 绕其竖直直径旋转,环上套一小珠,今给小珠以初始速度,使它可以自环的最低点沿环升至最高点,证明质点走完第一象限所需的时间为

$$\sqrt{\frac{R}{(n+1)g}}\ln(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}).$$

5.8　有一帆船在赤道区域自东向西行驶，因无风停了下来，有人建议船长，将船上一只重为 200 kg 的锚升至 20 m 高的桅杆顶端，可使船继续向前行驶（船的其余部分的重量为 2 000 kg）. 你认为这一建议是否可行，试定量解释之.

5.9　光滑钢丝圆圈的半径为 r，其平面为铅直，圆圈上套有一质量为 m 的小环，如圆圈以加速度 a 沿竖直方向运动，求小环的相对速度及圆圈对小环的作用力.

5.10　一轮船以速度 v 沿赤道航行，试证明物体重量有 $\frac{2v\omega}{g}$ 的误差，ω 为地球转动角速度.

5.11　在北纬 λ 处将质量为 m 的物体垂直上抛，到达 h 高后又落回地面，不计空气阻力，求落地点和抛射点的偏离距离.

5.12　在北纬 λ 的地球表面，向正东以初速 v_0、仰角 α 发射炮弹，不计空气阻力，求炮弹落地时的横向偏离.

5.13　对称轴为铅直的抛物线形金属丝，以均匀角速度 ω 绕对称轴转动，抛物线的方程式为 $x^2=4ay$. 有一质量为 m 的小环套在此金属丝上. 求小环的运动方程.

* **5.14**　一质点约束在动平面 Oxy 上运动. 此平面用球面铰链连接于 O 点，它的法线 Oz 绕固定的 Oz_0 轴以等角速度 ω 转动，Oz 和 Oz_0 的夹角为 α. 质点受到 O 点的吸引，引力大小与质点离 O 点的距离成正比. 求此质点的运动.

* **5.15**　长为 l 的轻杆 OA 可绕水平轴 Ox 转动，Ox 轴以角速度 ω 绕铅垂轴 Oz 转动，在 A 点有一质量为 m 的质点，即旋转单摆. 求质点的运动微分方程及相对平衡位置.

* **5.16**　讨论匀加速参考系中拉格朗日陀螺的运动.

5.17　质量分别为 m 和 m' 的两个质点，用一固有长度为 l 的弹簧相连，弹簧的劲度系数为 $k=\frac{2mm'}{m+m'}\omega^2$. 将此体系放在光滑水平管内. 设开始时质点相对于管子静止，求当管子绕管上某点以角速度 ω 转动时，两质点间的距离随时间的变化.

* **5.18**　一光滑平面可绕固定的水平轴 AA' 自由转动，一半径为 R，质量为 m 的圆环被约束在此平面上绕环上 O 点自由转动，O 点在 AA' 轴上，求圆环的运动方程.

第六章　多自由度体系的微振动

在简单介绍平衡的稳定性和线性振动概念的基础上，本章着重讨论多自由度体系线性自由振动的一般处理方法以及简正坐标和简正振动的概念，并对如何找简正坐标的问题作详细的讨论．以一维晶格振动和分子振动为例，介绍微振动在物理上的应用，并对如何从离散频谱向连续频谱过渡的问题进行讨论．最后简单地讨论多自由度体系的强迫振动和非线性振动．

§6.1　振动的分类和线性振动的概念

振动不仅在宏观的工程技术上大量存在，而且在微观领域(如固体物理中的晶格振动，光学中的分子振动光谱等)也普遍存在．我们在普通物理和高等数学中已经讨论过一个自由度的微振动．在以前的讨论中，我们曾从能量的角度出发把振动分为**自由振动**、**阻尼振动**和**强迫振动**三类．自由振动能量守恒，阻尼振动使机械能不断转化为热能，而强迫振动则不断从外界得到能量．但从数学的角度看，这三类振动所对应的微分方程是同一种类型的．数学上我们还可以用另外的标准对振动进行分类，例如按体系的自由度分类，或按微分方程是线性的还是非线性的来分类等等，如表 6.1 所示．表中共分 6 种情况，每一种又可细分为自由振动、阻尼振动和强迫振动．以前只讨论了表中的情况 Ⅰ．现在我们要把讨论的重点从 Ⅰ 扩展到 Ⅱ，即从一个自由度的线性振动扩大到有限多自由度的线性振动，同时对非线性振动也将作一简单的介绍．

表 6.1

	线性振动	非线性振动
单自由度	Ⅰ	Ⅳ
有限多自由度	Ⅱ	Ⅴ
无限自由度	Ⅲ	Ⅵ

什么叫有限多自由度的线性振动呢？自由度的概念不需再作解释，线性振动就是体系的运动微分方程是线性方程．例如单摆的运动方程

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$$

就不是线性方程．但当振幅很小时，取 $\sin\theta\approx\theta$，得到的方程

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0$$

就是线性方程．如果还存在与速度成正比的阻力 $-\beta\dot{\theta}$，或与时间有关的强迫力，上面的方程将变为

$$\ddot{\theta}+\beta\dot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=f(t),$$

这个方程仍是线性方程．

从物理上讲，什么样的振动可以看成是线性振动呢？从单摆的例子中看到：一般情况下单摆的运动不是线性振动，但如果单摆的振幅很小，并且只考虑一级近似，那就是线性振动．这个结论具有普遍性，即力学体系在平衡位置附近作微振动，只需考虑它的最低级近似，那么不论是自由振动、阻尼振动(阻力与速度一次方成正比)还是强迫振动，也不管自由度是多少，所得到的体系的运动微分方程都是线性方程，这种振动都属于线性振动，是实践上要处理的最普遍的一类振动问题．

为了讨论体系在平衡位置的微振动问题，首先要研究一下力学体系在平衡位置的性质．如果一个力学体系初始时刻的速度为零，处于某一确定的位置，并且在以后的全部时间里恒处于此位置，则此力学体系处于平衡状态，所处的位置称为**平衡位置**．在§2.4 中我们已经指出，保守体系的平衡位置由势能取极值的条件

$$\frac{\partial V}{\partial q_i}=0,\ i=1,2,\cdots,n$$

决定．

体系的平衡位置可分为三种不同的情况：**稳定平衡**、**不稳定平衡**和**随遇平衡**．图 6.1 表示重力场中的小球所处的三种平衡位置：(a) 是稳定平衡，(b) 是不稳定平衡，(c) 是随遇平衡．但上述取极值确定的平衡条件并没有指出相应的平衡位置是稳定平衡、不稳定平衡还是随遇平衡．对振动问题来说，有实际意义的是稳定平衡的位置．

托里拆利(E. Torricelli, 1608—1647)在1644年就已经指出，在重力作用下

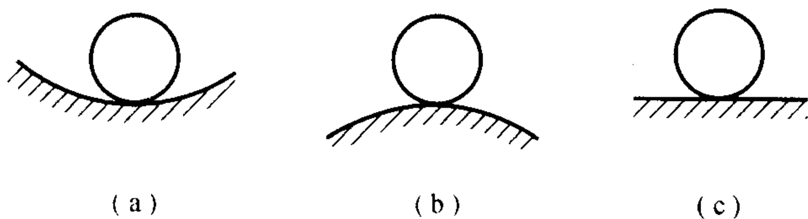


图 6.1

的力学体系，当其重心处于约束所允许的最低位置时，体系所在的位置是稳定的．拉格朗日将托里拆利的这一原理推广到任意保守体系的情况，并建立了**保守体系平衡位置稳定性的拉格朗日定理**：如果在某一位置，保守体系的势能有严格的极小值，则此位置是体系的稳定平衡位置．

1788 年拉格朗日在《**分析力学**》一书中最早提出这个定理，但定理的严格证明是由勒襄·狄里赫里给出的，因此这个定理又称**勒襄·狄里赫里定理**．数学上已证明，势能取极小值的条件，当自由度为 1 时是

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}q}=0,\ \frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}q^2}>0; \tag{1.1}$$

自由度为 2 时是

$$\frac{\partial V}{\partial q_1}=\frac{\partial V}{\partial q_2}=0, \tag{1.2}$$

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial q_1\partial q_2}\right)^2-\dfrac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}<0,\\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}>0,\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}>0.\end{cases} \tag{1.3}$$

拉格朗日定理的逆问题——平衡位置的不稳定性准则，迄今还没有完全解决，但已经证明**如果势能在平衡位置取极大值，则是不稳定平衡；势能是常数则是随遇平衡**．

§6.2　两个自由度保守体系的自由振动

微振动问题用拉格朗日方程讨论最方便．我们先讨论自由度为 2 的保守体系的自由振动．设体系的两个广义坐标为 x_1、x_2，则体系的运动方程为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}-\dfrac{\partial T}{\partial x_1}+\dfrac{\partial V}{\partial x_1}=0,\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}-\dfrac{\partial T}{\partial x_2}+\dfrac{\partial V}{\partial x_2}=0.\end{cases} \tag{2.1}$$

在§2.7 中曾指出，如果体系所受的约束是稳定的，则动能 T 必为广义速度的二次齐次式．对于平衡位置附近的微振动来说，体系的约束一定是稳定的．因此动能 T 可表示为

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}A_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j=\frac{1}{2}(A_{11}\dot{x}_1^2+2A_{12}\dot{x}_1\dot{x}_2+A_{22}\dot{x}_2^2), \tag{2.2}$$

其中 A_{ij} 是广义坐标的函数，并且

$$A_{ij}(x_1,x_2)=A_{ji}(x_1,x_2).$$

势能 V 和广义速度无关,仅是广义坐标的函数:

$$V=V(x_1,x_2).$$

上述并未对 T 和 V 的函数形式作任何限制和近似. 为了对 T 和 V 作简化和近似,取平衡位置为广义坐标 x_1 和 x_2 的零点,将势能 $V(x_1,x_2)$和动能 T 中的系数 $A_{ij}(x_1,x_2)$在平衡位置用泰勒级数展开:

$$V(x_1,x_2)=V(0,0)+\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)_0 x_i+\sum_{i,j=1}^{2}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\partial x_j}\right)_0 x_i x_j+(**), \tag{2.3}$$

$$A_{ij}(x_1,x_2)=A_{ij}(0,0)+\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_i}\right)_0 x_i+\cdots \tag{2.4}$$

(2.3)式中的 $V(0,0)$是体系在平衡位置的势能. 因为势能的零点可以任意选取,我们就选取 $V(0,0)=0$,同时由于平衡位置势能必取极值,因此$\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)_0$必为零. (2.3)中的(* *)表示 x_i 三次以上的项,体系在平衡位置作微振动时,x_1、x_2 都是小量,因此(* *)是 x 的三阶以上的小量. 综合以上各点考虑,如果我们保留到最低阶的非零小量,可将(2.3)式简化为

$$V(x_1,x_2)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\left(\frac{\partial V^2}{\partial x_i\partial x_j}\right)_0 x_i x_j=\frac{1}{2}(b_{11}x_1^2+2b_{12}x_1x_2+b_{22}x_2^2), \tag{2.5}$$

式中 $b_{ij}=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\partial x_j}\right)_0=b_{ji}$,是常数.

保守体系在平衡位置作振动,不仅广义坐标 x_1、x_2 是小量,而且广义速度 $\dot{x}_1$、$\dot{x}_2$ 也一定是小量,根据能量守恒,我们可以假定它和 x_1、x_2 是同级小量. 在势能 V 的展开式(2.5)中,只保留到二级小量,因此在动能 T 的表示式中也只要保留二级小量. 由于(2.2)式已是 $\dot{x}_i$ 的二次式,因此(2.4)的展开式中系数 $A_{ij}(x_1,x_2)$只要取零级近似即可:

$$A_{ij}(x_1,x_2)\approx A_{ij}(0,0)=a_{ij}.$$

于是动能 T 可表示为

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j=\frac{1}{2}(a_{11}\dot{x}_1^2+2a_{12}\dot{x}_1\dot{x}_2+a_{22}\dot{x}_2^2), \tag{2.6}$$

式中 $a_{ij}=a_{ji}$ 也都是常数.

将(2.5)和(2.6)代入(2.1)得

$$\begin{cases}a_{11}\ddot{x}_1+a_{12}\ddot{x}_2+b_{11}x_1+b_{12}x_2=0,\\ a_{21}\ddot{x}_1+a_{22}\ddot{x}_2+b_{21}x_1+b_{22}x_2=0,\end{cases} \tag{2.7}$$

或

$$\sum_{j=1}^{2}(a_{ij}\ddot{x}_j + b_{ij}x_j) = 0,\ i = 1,2. \tag{2.8}$$

(2.7)是一个二阶常系数线性齐次常微分方程组,可用常规方法来解,在我们的情况下可直接取试解为

$$\begin{cases} x_1 = A_1\sin(\omega t + \alpha), \\ x_2 = A_2\sin(\omega t + \alpha). \end{cases} \tag{2.9}$$

将(2.9)代入(2.7)得

$$\begin{cases} A_1(b_{11} - a_{11}\omega^2) + A_2(b_{12} - a_{12}\omega^2) = 0, \\ A_1(b_{21} - a_{21}\omega^2) + A_2(b_{22} - a_{22}\omega^2) = 0, \end{cases} \tag{2.10}$$

或

$$\sum_{j=1}^{2} A_j(b_{ij} - a_{ij}\omega^2) = 0,\ i = 1,2. \tag{2.11}$$

方程(2.10)有一个明显的解 $A_1 = A_2 = 0$,由此得 $x_1 = x_2 = 0$,它对应于体系的平衡状态,不是我们所需要的解. 要使(2.10)中的 A_1、A_2 有异于零的解,根据线性齐次代数方程的理论,方程的系数行列式必须为零. 考虑到 $a_{21} = a_{12}$, $b_{21} = b_{12}$,得

$$\begin{vmatrix} b_{11} - a_{11}\omega^2 & b_{12} - a_{12}\omega^2 \\ b_{12} - a_{12}\omega^2 & b_{22} - a_{22}\omega^2 \end{vmatrix}$$
$$= (b_{11} - a_{11}\omega^2)(b_{22} - a_{22}\omega^2) - (b_{12} - a_{12}\omega^2)^2 = 0, \tag{2.12}$$

这个方程称为**久期方程**或**频率方程**,由它可决定试解(2.9)中的频率所必须满足的条件. 一般来说,像(2.12)这样一个关于 ω^2 的二次代数方程的两个根可正、可负,还可以是复数. 但在我们的情况下,可以证明它恒有两个正的实根. 下面我们来给出这个证明.

体系只有在稳定平衡位置附近作振动才是微振动. 在平衡位置势能 V 取极小值. 因此 V 的表示式(2.5)中,只要 x_1、x_2 不同时为零,必有 $V>0$,这要求系数 b_{11}、b_{12}和 b_{22}之间满足一定条件. 首先,由于 x_1 和 x_2 是互相独立的,因此当 $x_2=0$ 时,要使(2.5)为正,必须 $b_{11}>0$. 同样,当 $x_1=0$ 时要求 $V>0$,必须有 $b_{22}>0$. 其次,我们把(2.5)式改写为

$$V = \frac{1}{2b_{22}}[(b_{12}x_1 + b_{22}x_2)^2 + (b_{11}b_{22} - b_{12}^2)x_1^2],$$

要使上式恒正,必须满足条件 $b_{11}b_{22} - b_{12}^2>0$. 所以对于势能 V 的系数,必有

$$b_{11} > 0,\ b_{22} > 0,\ b_{11}b_{22} - b_{12}^2 > 0, \tag{2.13}$$

同样,由于动能 $T>0$,可以推断必须

$$a_{11}>0,\ a_{22}>0,\ a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0. \tag{2.14}$$

由(2.13)和(2.14)即可保证久期方程(2.12)有两个正根. 用 $f(\omega^2)$表示方程(2.12)的左端,作 $f(\omega^2)-\omega^2$ 的图形. 当 $\omega^2=0$ 时,$f(0)=b_{11}b_{22}-b_{12}^2>0$;当 $\omega^2\to+\infty$时,$f(+\infty)=(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)\omega^4>0$;当 $\omega^2=\dfrac{b_{11}}{a_{11}}$时,

$$f\left(\frac{b_{11}}{a_{11}}\right)=-\left(b_{12}-a_{12}\frac{b_{11}}{a_{11}}\right)^2<0;$$

当 $\omega^2=\dfrac{b_{22}}{a_{22}}$时,

$$f\left(\frac{b_{22}}{a_{22}}\right)=-\left(b_{12}-a_{12}\frac{b_{22}}{a_{22}}\right)^2<0.$$

由此可以得出结论:$f(\omega^2)$在 $\omega^2=0$ 和 $\omega^2\to+\infty$区间内必有两次通过横坐标轴,如图 6.2(a)所示. 这就证明了久期方程(2.12)必有两个正的实根,我们令它们为 ω_1^2 和 ω_2^2.

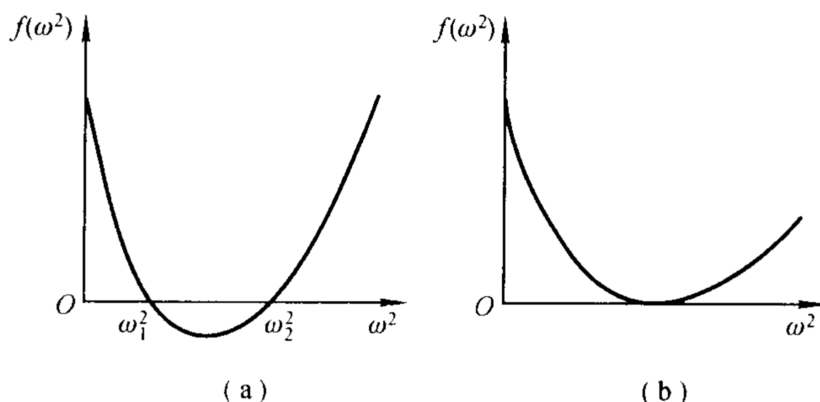


图 6.2

将久期方程的两个根 ω_1^2 和 ω_2^2 代入(2.10)中的任意一式即可得出试解(2.9)的两个振幅的比值:

$$\begin{aligned}\frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}}&=\frac{a_{11}\omega_1^2-b_{11}}{b_{12}-a_{12}\omega_1^2}=\mu_2^{(1)},\\ \frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}}&=\frac{a_{11}\omega_2^2-b_{11}}{b_{12}-a_{12}\omega_2^2}=\mu_2^{(2)},\end{aligned} \tag{2.15}$$

式中 $\mu^{(1)}$、$\mu^{(2)}$均为常数,$\mu_i^{(j)}$ 和$A_i^{(j)}$ 中上角标j 表示和频率ω_j 相应的量,下角标 i 则表示第i 个振幅. 将(2.15)代入(2.9)式,最后可得方程(2.7)的两组特解

$$\begin{cases}x_1^{(1)}=A_1^{(1)}\sin(\omega_1t+\alpha_1),\\ x_2^{(1)}=\mu_2^{(1)}A_1^{(1)}\sin(\omega_1t+\alpha_1);\end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = A_1^{(2)} \sin(\omega_2 t + \alpha_2), \\ x_2^{(2)} = \mu_2^{(2)} A_1^{(2)} \sin(\omega_2 t + \alpha_2). \end{cases}$$

根据线性方程的原理,方程(2.7)的通解是这两组特解的线性叠加,即

$$\begin{cases} x_1 = C_1 x_1^{(1)} + C_2 x_1^{(2)} = A_1'^{(1)} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_1'^{(2)} \sin(\omega_2 t + \alpha_2), \\ x_2 = \mu_2^{(1)} A_1'^{(1)} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \mu_2^{(2)} A_1'^{(2)} \sin(\omega_2 t + \alpha_2), \end{cases} \tag{2.16}$$

式中四个常数 $A_1'^{(1)}$、$A_2'^{(1)}$、α_1、α_2 由初始条件 $x_1(0)$、$x_2(0)$、$\dot{x}_1(0)$、$\dot{x}_2(0)$决定.

久期方程(2.12)除了上面所讨论的两个不等的正根外,还有一种可能是两个正的等根,在

$$\frac{b_{11}}{a_{11}} = \frac{b_{22}}{a_{22}} = \frac{b_{12}}{a_{12}}$$

时就是如此. 这时 $f(\omega^2) - \omega^2$ 的图形如图 6.2(b)所示,曲线和坐标轴只有一个切点,此切点的位置就是重根 ω^2 的值:

$$\omega^2 = \frac{b_{11}}{a_{11}} = \frac{b_{22}}{a_{22}} = \frac{b_{12}}{a_{12}}. \tag{2.17}$$

此时不论 A_1、A_2 取什么值,方程(2.10)都能满足. 这种情况下我们可取两组特解为

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1), \\ x_2^{(1)} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 0, \\ x_2^{(2)} = A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2). \end{cases}$$

而通解则为

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1), \\ x_2 = A_2 \sin(\omega t + \alpha_2). \end{cases} \tag{2.18}$$

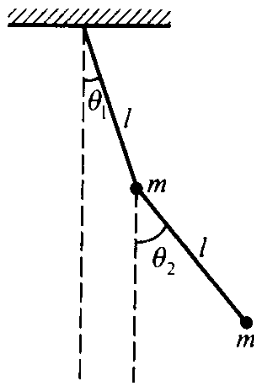


图 6.3

【例 1】 两个相同的单摆按图 6.3 那样耦合起来(双单摆),求体系作微振动时的运动规律.

解:体系的自由度为 2,取 θ_1 和 θ_2 为广义坐标,则

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} ml^2 (2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2), \\ V = \frac{1}{2} mgl (2\theta_1^2 + \theta_2^2), \end{cases} \tag{1}$$

将(1)代入拉格朗日方程得

$$\begin{cases} 2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + 2\dfrac{g}{l}\theta_1 = 0, \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \dfrac{g}{l}\theta_2 = 0. \end{cases} \tag{2}$$

令方程(2)的特解为

$$\begin{cases} \theta_1 = A_1 \sin(\omega t + \alpha), \\ \theta_2 = A_2 \sin(\omega t + \alpha). \end{cases} \tag{3}$$

将(3)代入(2)得

$$\begin{cases} 2\left(\dfrac{g}{l} - \omega^2\right)A_1 - \omega^2 A_2 = 0, \\ -\omega^2 A_1 + \left(\dfrac{g}{l} - \omega^2\right)A_2 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

要使上式的 A_1、A_2 有不恒为零的解，必须

$$\begin{vmatrix} 2\left(\dfrac{g}{l} - \omega^2\right) & -\omega^2 \\ -\omega^2 & \dfrac{g}{l} - \omega^2 \end{vmatrix} = 2\left(\dfrac{g}{l} - \omega^2\right)^2 - \omega^4 = 0. \tag{5}$$

由(5)得

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l}(2 - \sqrt{2}), \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l}(2 + \sqrt{2}). \tag{6}$$

将(6)代入(4)中的任一式得

$$\frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}} = \frac{2\left(\dfrac{g}{l} - \omega_1^2\right)}{\omega_1^2} = \sqrt{2},$$

$$\frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}} = \frac{2\left(\dfrac{g}{l} - \omega_2^2\right)}{\omega_2^2} = -\sqrt{2}. \tag{7}$$

这里 $A_1^{(1)}$、$A_1^{(2)}$、$A_2^{(1)}$、$A_2^{(2)}$ 为方程(4)的根．于是两个特解即可确定，而通解则由它们线性叠加而得：

$$\begin{cases} \theta_1 = A_1^{(1)} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_1^{(2)} \sin(\omega_2 t + \alpha_2), \\ \theta_2 = \sqrt{2}A_1^{(1)} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) - \sqrt{2}A_1^{(2)} \sin(\omega_2 t + \alpha_2), \end{cases} \tag{8}$$

常数 $A_1^{(1)}$、$A_1^{(2)}$、α_1、α_2 由初始条件决定．

【例 2】 试求如图 6.4 所示的两个耦合振子的振动频率．

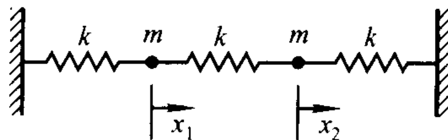


图 6.4

解：体系的自由度为 2，取振子离开其平衡位置的位移 x_1 和 x_2 为广义坐标，则

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2), \\ V &= \frac{1}{2}k[x_1^2 + (x_2 - x_1)^2 + x_2^2]. \end{aligned} \tag{1}$$

将(1)代入拉格朗日方程得

$$m\ddot{x}_1 = -2kx_1 + kx_2, \tag{2}$$

$$m\ddot{x}_2 = kx_1 - 2kx_2. \tag{3}$$

引进两个新的坐标 $q_1 = x_1 + x_2$ 和 $q_2 = x_1 - x_2$，分别将方程(2)和(3)相加减，得

$$\ddot{q}_1 + \frac{k}{m}q_1 = 0,$$

$$\ddot{q}_2 + \frac{3k}{m}q_2 = 0.$$

由此得 q_1 和 q_2 振动模式的频率分别为 $\omega_1 = \sqrt{k/m}$ 和 $\omega_2 = \sqrt{3k/m}$.

*§6.3 n 个自由度保守体系的自由振动

由两个自由度体系的自由振动可以推广到 n 个自由度体系的自由振动. 首先写出体系的动能和势能，并在平衡位置展开为泰勒级数，保留到二级小量，得

$$\begin{cases} T = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j, \\ V = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_ix_j. \end{cases} \tag{3.1}$$

将它们代入拉格朗日方程得

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ddot{x}_j + b_{ij}x_j = 0,\ i = 1,2,\cdots,n, \tag{3.2}$$

令方程(3.2)的特解为

$$x_i = A_i\sin(\omega t + \alpha),\ i = 1,2,\cdots,n, \tag{3.3}$$

将(3.3)代入(3.2)得

$$\sum_{j=1}^{n} A_j(b_{ij} - a_{ij}\omega^2) = 0,\ i = 1,2,\cdots,n. \tag{3.4}$$

要使上式有不恒为零的解，其系数行列式必须为零：

$$\begin{vmatrix} b_{11} - a_{11}\omega^2 & b_{12} - a_{12}\omega^2 & \cdots & b_{1n} - a_{1n}\omega^2 \\ b_{21} - a_{21}\omega^2 & b_{22} - a_{22}\omega^2 & \cdots & b_{2n} - a_{2n}\omega^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} - a_{n1}\omega^2 & b_{n2} - a_{n2}\omega^2 & \cdots & b_{nn} - a_{nn}\omega^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.5}$$

这是一个关于 ω^2 的 n 次多项式，它有 n 个根 $\omega_j^2 (j = 1,2,\cdots,n)$，可以证明这些根都是正的实根.

下面求振幅比. 将 ω_j^2 代入(3.4)式，把 A_1 看作已知的，然后对 $n-1$ 个 $A_2, A_3, \cdots, A_n$ 求解，可得

$$A_2^{(j)} = \mu_2^{(j)} A_1^{(j)},\ A_3^{(j)} = \mu_3^{(j)} A_1^{(j)}, \cdots, A_n^{(j)} = \mu_n^{(j)} A_1^{(j)}, \tag{3.6}$$
$$j = 1, 2, \cdots, n.$$

这些 $\mu_i^{(j)}$ 都是常数,共有 $n(n-1)$个.

方程(3.2)的一个特解为

$$x_i = A_i^{(j)} \sin(\omega_j t + \alpha_j),\ i = 1, 2, \cdots, n. \tag{3.7}$$

其通解则为这些特解的线性叠加:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} A_i^{(j)} \sin(\omega_j t + \alpha_j), \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{3.8}$$

方程(3.8)中共有 n^2 个振幅 $A_i^{(j)}$,但(3.6)提供了 $n(n-1)$个已知的比值. 因此这 n^2 个振幅中独立的只有 $n^2 - n(n-1) = n$ 个,即 $A_1^{(1)}, A_1^{(2)}, \cdots, A_1^{(n)}$,再加上 n 个相角 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$,共有 $2n$ 个待定常数,它们可由初始条件决定.

【例】 设有三个相同的质点 m,分别系于张得很紧的弦的等分点上. 弦的两端固定(如图 6.5 所示). 假定弦的初始张力非常大,各质点作横向振动时,张力 F 可以看成常量. 求体系的振动情况.

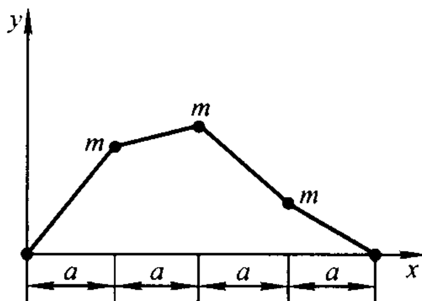


图 6.5

解: 从图中可以看出,弦的伸长 Δl 为

$$\Delta l = \left[\sqrt{y_1^2 + a^2} + \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + a^2} + \sqrt{(y_3 - y_2)^2 + a^2} + \sqrt{y_3^2 + a^2}\right] - 4a$$
$$\approx \frac{a}{2}\left[\left(\frac{y_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_2 - y_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_3 - y_2}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_3}{a}\right)^2\right].$$

所以弦的弹性势能为

$$V = F\Delta l = \frac{F}{2a}[y_1^2 + (y_2 - y_1)^2 + (y_3 - y_2)^2 + y_3^2]. \tag{1}$$

体系的动能为

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{y}_3^2). \tag{2}$$

将 T 和 V 代入拉格朗日方程得

$$\begin{cases} m\ddot{y}_1 + \dfrac{F}{a}(2y_1 - y_2) = 0, \\ m\ddot{y}_2 + \dfrac{F}{a}(2y_2 - y_1 - y_3) = 0, \\ m\ddot{y}_3 + \dfrac{F}{a}(2y_3 - y_2) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

下面解这个方程组. 设特解为

$$\begin{cases} y_1 = A_1 \sin(\omega t + \alpha), \\ y_2 = A_2 \sin(\omega t + \alpha), \\ y_3 = A_3 \sin(\omega t + \alpha). \end{cases} \tag{4}$$

引入记号

$$\beta=\frac{F}{ma},$$

并将(4)代入(3)得

$$\begin{cases}A_1(\omega^2-2\beta)+A_2\beta=0,\\ A_1\beta+A_2(\omega^2-2\beta)+A_3\beta=0,\\ A_2\beta+A_3(\omega^2-2\beta)=0.\end{cases}\tag{5}$$

要使代数方程(5)对于 A_1、A_2、A_3 有异于零的解,ω^2 必须满足久期方程:

$$\begin{vmatrix}\omega^2-2\beta & \beta & 0\\ \beta & \omega^2-2\beta & \beta\\ 0 & \beta & \omega^2-2\beta\end{vmatrix}=(\omega^2-2\beta)(\omega^4-4\beta\omega^2+2\beta^2)=0.\tag{6}$$

它的三个根为

$$\begin{cases}\omega_1^2=(2-\sqrt{2})\beta,\\ \omega_2^2=2\beta,\\ \omega_3^2=(2+\sqrt{2})\beta.\end{cases}\tag{7}$$

下面我们求振幅比. 将(7)中的 ω_1^2、ω_2^2 和 ω_3^2 分别代入(5)中的任意两式,可得

$$\begin{cases}A_2^{(1)}=-\dfrac{1}{\beta}(\omega_1^2-2\beta)A_1^{(1)}=\sqrt{2}A_1^{(1)},\\ A_3^{(1)}=-\dfrac{\beta}{\omega_1^2-2\beta}A_2^{(1)}=A_1^{(1)};\end{cases}\tag{8}$$

$$\begin{cases}A_2^{(2)}=-\dfrac{1}{\beta}(\omega_2^2-2\beta)A_1^{(2)}=0,\\ A_3^{(2)}=-\dfrac{\beta}{\omega_2^2-2\beta}A_2^{(2)}=-A_1^{(2)};\end{cases}\tag{9}$$

$$\begin{cases}A_2^{(3)}=-\dfrac{1}{\beta}(\omega_3^2-2\beta)=-\sqrt{2}A_1^{(3)},\\ A_3^{(3)}=-\dfrac{\beta}{\omega_3^2-2\beta}A_2^{(3)}=A_1^{(3)}.\end{cases}\tag{10}$$

于是最后得方程(3)的通解为

$$\begin{cases}y_1=A_1^{(1)}\sin(\omega_1t+\alpha_1)+A_1^{(2)}\sin(\omega_2t+\alpha_2)+A_1^{(3)}\sin(\omega_3t+\alpha_3),\\ y_2=\sqrt{2}A_1^{(1)}\sin(\omega_1t+\alpha_1)-\sqrt{2}A_1^{(3)}\sin(\omega_3t+\alpha_3),\\ y_3=A_1^{(1)}\sin(\omega_1t+\alpha_1)-A_1^{(2)}\sin(\omega_2t+\alpha_2)+A_1^{(3)}\sin(\omega_3t+\alpha_3),\end{cases}\tag{11}$$

式中的 $A_1^{(1)}$、$A_1^{(2)}$、$A_1^{(3)}$ 和 α_1、α_2、α_3 六个常数则由初始条件决定.

§6.4 简正坐标和简正振动

我们知道,一个力学体系的广义坐标可有多种选取方式,广义坐标选取得适

当,拉格朗日方程就容易求解. 那么在上面两节的三个例子中,我们所取的广义坐标是否是最适当的呢? 让我们来考察一下这个问题.

先看双单摆的例子. 如果我们不取那里的 θ_1 和 θ_2,而取

$$\begin{cases} q_1 = \theta_1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\theta_2, \\ q_2 = \theta_1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\theta_2 \end{cases} \tag{4.1}$$

为广义坐标,情况会怎样呢? 由上式得

$$\begin{cases} \theta_1 = \dfrac{q_1 + q_2}{2}, \\ \theta_2 = \dfrac{q_1 - q_2}{\sqrt{2}}. \end{cases} \tag{4.2}$$

由此可得

$$\begin{cases} T = \dfrac{1}{2}ml^2(2\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) \\ \quad = \dfrac{1}{2}ml^2\left[\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\dot{q}_1^2 + \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\dot{q}_2^2\right], \\ V = \dfrac{1}{2}mgl(2\theta_1^2 + \theta_2^2) = \dfrac{1}{2}mgl(q_1^2 + q_2^2). \end{cases} \tag{4.3}$$

代入拉格朗日方程得

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + \dfrac{g}{l}\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}q_1 = 0, \\ \ddot{q}_2 + \dfrac{g}{l}\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}q_2 = 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

这两个方程互相独立,每个方程只含一个广义坐标,并且都是谐振动方程,因此立即可求得其通解为

$$\begin{cases} q_1 = A_1\sin(\omega_1 t + \alpha_1), \\ q_2 = A_2\sin(\omega_2 t + \alpha_2), \end{cases} \tag{4.5}$$

其中

$$\begin{cases} \omega_1^2 = \dfrac{g}{l}\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{g}{l}(2-\sqrt{2}), \\ \omega_2^2 = \dfrac{g}{l}\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{g}{l}(2+\sqrt{2}), \end{cases} \tag{4.6}$$

和以前得出的一样. 将(4.5)代入(4.2)得

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \frac{A_1}{2}\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \frac{A_2}{2}\sin(\omega_2 t + \alpha_2),\\ \theta_2 &= \frac{A_1}{\sqrt{2}}\sin(\omega_1 t + \alpha_1) - \frac{A_2}{\sqrt{2}}\sin(\omega_2 t + \alpha_2),\end{aligned} \tag{4.7}$$

也和以前所得的结果一样．在双单摆这个例子中，用(4.1)式所规定的 q_1 和 q_2 作为广义坐标，显然比用 θ_1 和 θ_2 要方便得多．

从这个例子中我们看到，在处理线性振动的问题时如果所选取的广义坐标能使 T 和 V 同时成为广义速度 $\dot{q}_i$ 和广义坐标 q_i 的平方之和的形式：

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{q}_1^2 + a_{22}\dot{q}_2^2 + \cdots + a_{nn}\dot{q}_n^2), \end{cases} \tag{4.8}$$

代入(4.5)得

$$\begin{cases} q_1 = 2\theta_0 \cos \omega_1 t, \\ q_2 = 0. \end{cases} \tag{4.11}$$

其振动模式如图 6.6(a)所示,它等效于一个摆长为 $l_1 = \dfrac{l}{2-\sqrt{2}} \approx 1.7l$,初速度为零,初位置为 $2\theta_0$ 的单摆的运动. 类似地,如初条件为

$$\theta_1(0) = \theta_0,\ \theta_2(0) = -\sqrt{2}\theta_0,$$
$$\dot{\theta}_1(0) = 0,\ \dot{\theta}_2(0) = 0,$$

则可得

$$\begin{cases} q_1 = 0, \\ q_2 = 2\theta_0 \cos \omega_2 t. \end{cases} \tag{4.12}$$

其振动模式如图 6.6(b)所示,它等效于一个摆长为 $l_2 = \dfrac{l}{2+\sqrt{2}} \approx 0.3l$,初速度为零,初位置为 $2\theta_0$ 的单摆运动.

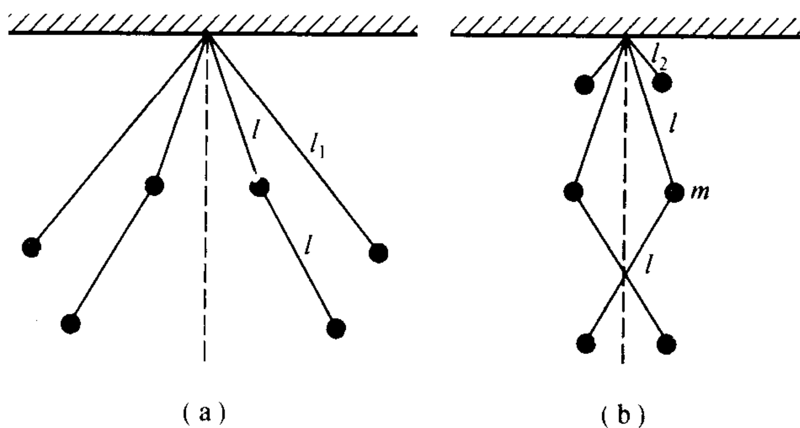


图 6.6

从双单摆这个例子,可看出简正坐标的物理意义:如果体系在振动过程中只以一个频率振动,其余频率的振动没有激发,则反映这种振动模式的坐标就是简正坐标,相应的振动模式称为**简正振动**或**本征振动**. 体系的任意一种振动状态,则是各种简正振动的线性叠加. 由此可见,选取简正坐标,不仅有利于方程求解,而且还直接反映了体系振动的物理本性. 因此在微振动问题中,我们总希望能选取简正坐标作为广义坐标,正像在刚体定点转动问题中,我们总是取惯量主轴作为坐标轴一样.

那么如何去找简正坐标呢? 我们将介绍三种方法. 常规方法是应用线性代数的知识,通过坐标的线性变换将两个二次式同时化为平方和的方法来得到. 这种方法我们将在下节详细介绍,它同时也给出了寻找惯量主轴的一般方法.

第二种方法是根据简正坐标的物理意义,分析体系的一般振动可分解为哪几种基本振动,凭物理直觉来“猜想”什么是简正坐标,我们将在§6.7中结合实际问题对此作一些讨论. 本节只介绍第三种方法. 这种方法在自由度为2时是极其方便的,因此我们先从自由度为2的情况着手.

设 x_1、x_2 是任意的两个广义坐标,q_1、q_2 是待求的简正坐标. 作变换

$$\begin{cases} q_1 = x_1 + \alpha x_2, \\ q_2 = x_1 + \beta x_2, \end{cases} \tag{4.13}$$

式中 α、β 是待定的. 由(4.13)可解得

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\alpha q_2 - \beta q_1}{\alpha - \beta}, \\ x_2 &= \frac{q_1 - q_2}{\alpha - \beta}, \end{aligned} \tag{4.14}$$

把上式代入

$$\begin{cases} T = \dfrac{1}{2}(a_{11}\dot{x}_1^2 + 2a_{12}\dot{x}_1\dot{x}_2 + a_{22}\dot{x}_2^2), \\ V = \dfrac{1}{2}(b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2) \end{cases}$$

中,则 T 和 V 将变换为用 $\dot{q}$ 和 q 来表示. 由于 q 是简正坐标,因此 T 中的 $\dot{q}_1\dot{q}_2$ 项的系数和 V 中的 q_1q_2 项的系数必为零. 由此可得

$$\begin{cases} a_{12}(\alpha + \beta) = a_{11}\alpha\beta + a_{22}, \\ b_{12}(\alpha + \beta) = b_{11}\alpha\beta + b_{22}. \end{cases} \tag{4.15}$$

由这个方程解出 α、β 后代入(4.13)式,即可得到简正坐标. 例如双单摆的问题,由(4.3)知

$$\begin{aligned} &a_{11} = 2ml^2, a_{12} = ml^2, \ a_{22} = ml^2, \\ &b_{11} = 2mgl, b_{12} = 0, \quad b_{22} = mgl. \end{aligned}$$

将它们代入(4.15)得

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2\alpha\beta + 1, \\ 2\alpha\beta + 1 = 0. \end{cases}$$

解此方程得

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \ \beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

代入(4.13)即得(4.1)式,q_1、q_2 确实就是双单摆的简正坐标.

上述方法对于自由度为3或更高的情况也是适用的. 例如对于 $n = 3$,这时可令

$$\begin{cases} q_1 = x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3, \\ q_2 = x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3, \\ q_3 = x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3. \end{cases} \tag{4.16}$$

然后将 x_1、x_2、x_3 分别用 q_1、q_2、q_3 来表示，再代入 T 和 V 中，令 $\dot{q}_1\dot{q}_2$、$\dot{q}_1\dot{q}_3$、$\dot{q}_2\dot{q}_3$ 和 q_1q_2、q_1q_3、q_2q_3 项的系数为零，得到 6 个方程. 由这 6 个方程可解出(4.16)中的 6 个待定系数 α_{12}、α_{13}、α_{22}、α_{23}、α_{32}、α_{33}，从而求得简正坐标 q_1、q_2、q_3. 对于 $n=4, n=5\cdots\cdots$亦类似. 但这种方法在自由度大于 3 时运算起来十分麻烦，不如直接用下节的常规方法.

**§6.5 寻找简正坐标的一般方法

本节我们介绍寻找简正坐标的一般方法，即寻找一坐标变换

$$q_\alpha = \sum_\beta C_{\alpha\beta}x_\beta, \tag{5.1}$$

它可使

$$T = \sum_{\alpha,\beta=1}^n \frac{1}{2} a_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta$$

和

$$V = \sum_{\alpha,\beta=1}^n \frac{1}{2} b_{\alpha\beta}q_\alpha q_\beta$$

同时化为广义速度和广义坐标的平方和的形式：

$$T = \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{2} a'_{\alpha\alpha}\dot{x}_\alpha^2,$$

$$V = \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{2} b'_{\alpha\alpha}x_\alpha^2.$$

为简单起见，我们只给出寻找变换系数 $C_{\alpha\beta}$ 的具体的方法步骤，而将证明从略.

要将两个二次式同时变为平方和的形式，首先要将其中的一个(假定为 V)先化为平方和的形式. 我们采用矩阵的表示式：

$$V = \widetilde{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q} = \sum_{\alpha,\beta=1}^n b_{\alpha\beta}q_\alpha q_\beta. \tag{5.2}$$

坐标变换(5.1)用矩阵表示就是

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}, \tag{5.3}$$

或用其转置矩阵表示为

$$\widetilde{\boldsymbol{Q}} = \widetilde{\boldsymbol{X}}\,\widetilde{\boldsymbol{C}}. \tag{5.4}$$

将(5.3)和(5.4)代入(5.2)得

$$V = \widetilde{\boldsymbol{X}}\widetilde{\boldsymbol{C}}\,\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\boldsymbol{X} = \widetilde{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{X},$$

其中

$$D=\widetilde{C}BC.$$

我们的目的是要使 V 化为

$$V=\sum_{\alpha=1}^{n}\lambda_\alpha x_\alpha^2 \tag{5.5}$$

的形式，这就要求 $\boldsymbol{D}$ 为对角矩阵：

$$D=\widetilde{C}BC=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

在矩阵理论中，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 称为**矩阵 B 的本征值**，它们是本征值方程

$$\det|B-\lambda I|=\begin{vmatrix}b_{11}-\lambda & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22}-\lambda & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=0 \tag{5.6}$$

的根，式中 I 是**单位矩阵**，矩阵 C 则由矩阵 B 的本征矢 $K_1,K_2,\cdots,K_n$ 组成：

$$C=(K_1\,K_2\cdots K_n),$$

其中

$$K_\alpha=\begin{pmatrix}C_{1\alpha}\\ C_{2\alpha}\\ \vdots\\ C_{n\alpha}\end{pmatrix}$$

是对应于本征值 λ_α 的矩阵 B 的本征矢，它由方程

$$B\,K_\alpha=\lambda_\alpha K_\alpha,$$

亦即由

$$\begin{cases}b_{11}C_{1\alpha}+b_{12}C_{2\alpha}+\cdots+b_{1n}C_{n\alpha}=\lambda_\alpha C_{1\alpha},\\ b_{21}C_{1\alpha}+b_{22}C_{2\alpha}+\cdots+b_{2n}C_{n\alpha}=\lambda_\alpha C_{2\alpha},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ b_{n1}C_{1\alpha}+b_{n2}C_{2\alpha}+\cdots+b_{nn}C_{n\alpha}=\lambda_\alpha C_{n\alpha},\end{cases} \tag{5.7}$$

$$\alpha=1,2,\cdots,n$$

决定．所以要将(5.2)化为(5.5)的形式，全部运算归结为解两个方程式．首先是解矩阵 B 的本征值方程(5.6)，由它可直接给出(5.5)式．然后解矩阵 B 的本征矢方程(5.7)，由它可得到矩阵 C，从而得到新旧坐标的变换关系式(5.1)．

【例 1】 将 $V=2q_1^2+\frac{5}{2}q_2^2+2q_3^2-q_1q_2-q_2q_3$ 化为平方和的形式．

解：

$$V=(q_1\ q_2\ q_3)\begin{pmatrix}2 & -\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{2} & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_1\\ q_2\\ q_3\end{pmatrix}. \tag{1}$$

首先解本征值方程：

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2}-\lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left(\lambda^2 - \frac{9}{2}\lambda + \frac{9}{2}\right) = 0,$$

得

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = \frac{3}{2}. \tag{2}$$

其次解本征矢方程. 先将 $\lambda_1 = 2$ 代入(5.7)得

$$\begin{cases} 2C_{11} - \frac{1}{2}C_{21} = 2C_{11}, \\ -\frac{1}{2}C_{11} + \frac{5}{2}C_{21} - \frac{1}{2}C_{31} = 2C_{21}, \\ -\frac{1}{2}C_{21} + 2C_{31} = 2C_{31}. \end{cases}$$

它的一组归一化的解为

$$C_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad C_{21} = 0, \quad C_{31} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

类似地将 $\lambda_2 = 3$ 和 $\lambda_3 = \frac{3}{2}$ 代入(5.7)可解得另外两组归一化的解为

$$C_{12} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \ C_{22} = -\frac{2}{\sqrt{6}}, \ C_{32} = \frac{1}{\sqrt{6}};$$

$$C_{13} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \ C_{23} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \ C_{33} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

从而得新旧坐标的变换矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

将(3)代入(5.3)得

$$\begin{cases} q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_3, \\ q_2 = -\frac{2}{\sqrt{6}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_3, \\ q_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_3. \end{cases} \tag{4}$$

由(4)可解得

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(q_1 - q_3), \\ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(q_1 - 2q_2 + q_3), \\ x_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(q_1 + q_2 + q_3). \end{cases} \tag{5}$$

(4)和(5)就是新旧坐标的变换关系. 根据(5.5)可直接写出变换后 V 的表示式为

$$V = 2x_1^2 + 3x_2^2 + \frac{3}{2}x_3^2. \tag{6}$$

将(4)代入(1)也可得到(6),这可作为(5.5)式正确性的一种验证.

下面我们再来讨论将 T 和 V 同时化为平方和的形式的问题. 在完成了将其中的任意一个(现在是 V)化为平方和的形式后,对另一个还要作同样的坐标变换. 这时 T 和 V 的形式必为:

$$T = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a'_{\alpha\beta}\dot{x}_\alpha\dot{x}_\beta, \tag{5.8}$$

$$V = \sum_{\alpha=1}^{n} b'_{\alpha\alpha}x_\alpha^2. \tag{5.9}$$

我们的任务是再作一次坐标变换

$$\xi_\alpha = \sum_\beta C'_{\alpha\beta}x_\beta, \tag{5.10}$$

这一变换除了要达到使(5.8)式的 T 变为平方和的形式外,还必须使(5.9)式的 V 仍然保持平方和的形式. 如果我们重复前面的方法将(5.8)式的 T 化为平方和的形式,一般情况下不能保证(5.9)式的 V 仍然保持平方和的形式. 因此现在的方法和只考虑 V 时的情况不同;但总的步骤仍是解本征值方程和本征矢方程两步,但方程的形式略有不同,不但和 T 的系数矩阵(非对角矩阵)有关,而且还和 V 的系数矩阵(已为对角矩阵)有关. 本征值方程不能取 $|\boldsymbol{A}' - \lambda\boldsymbol{I}| = 0$ 的形式,而应取

$$|\boldsymbol{A}' - \lambda'\boldsymbol{B}'| = 0, \tag{5.11}$$

式中

$$\boldsymbol{A}' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}' = \begin{pmatrix} b'_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b'_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b'_{nn} \end{pmatrix}$$

分别为(5.8)和(5.9)的系数矩阵. 本征矢方程也作相应变化,不取 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{K}'_\beta = \lambda'_\beta\boldsymbol{K}'_\beta$ 的形式,而是取

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{K}'_\beta = \lambda'_\beta\boldsymbol{B}'\boldsymbol{K}'_\beta. \tag{5.12}$$

变换矩阵 $\boldsymbol{C}'$ 仍为

$$\boldsymbol{C}' = (\boldsymbol{K}'_1 \boldsymbol{K}'_2 \cdots \boldsymbol{K}'_n) = \begin{pmatrix} C'_{11} & C'_{12} & \cdots & C'_{1n} \\ C'_{21} & C'_{22} & \cdots & C'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C'_{n1} & C'_{n2} & \cdots & C'_{nn} \end{pmatrix}. \tag{5.13}$$

【例 2】 将 §6.2 的双单摆例中的

$$T = \frac{1}{2} ml^2 (2\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2),$$

$$V = \frac{1}{2} mgl(2\theta_1^2 + \theta_2^2)$$

同时化为平方和的形式.

解: 本题的 V 已为平方和的形式,因此可直接进行第二步运算. 首先解本征值方程(5.11):

$$|\boldsymbol{A}' - \lambda \boldsymbol{B}'| = \begin{vmatrix} ml^2 - mgl\lambda & \frac{1}{2} ml^2 \\ \frac{1}{2} ml^2 & \frac{1}{2} ml^2 - \frac{1}{2} mgl\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \frac{m^2 l^2}{2}(l - g\lambda)^2 - \frac{1}{4} m^2 l^4 = 0,$$

解得两个本征值为:

$$\lambda_1 = \frac{l(2+\sqrt{2})}{2g}, \quad \lambda_2 = \frac{l(2-\sqrt{2})}{2g}.$$

其次解本征矢方程. 将 λ_1 代入(5.12)得

$$ml^2 C_{11} + \frac{1}{2} ml^2 C_{21} = \frac{l(2+\sqrt{2})}{2g} mglC_{11},$$

$$\frac{1}{2} ml^2 C_{11} + \frac{1}{2} ml^2 C_{21} = \frac{l(2+\sqrt{2})}{2g} \frac{1}{2} mglC_{21},$$

它的一组规一化的解为

$$C_{11} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad C_{21} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

类似地将 λ_2 代入(5.12),解得

$$C_{12} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad C_{22} = -\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

于是变换矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}.$$

最后由

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix},$$

得新旧坐标的变换关系为

$$\begin{cases}\theta_1=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{q_1+q_2}{2},\\[2mm] \theta_2=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{q_1-q_2}{\sqrt{2}};\end{cases}$$

$$\begin{cases}q_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\theta_1+\dfrac{\theta_2}{\sqrt{2}}\right),\\[2mm] q_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\theta_1-\dfrac{\theta_2}{\sqrt{2}}\right);\end{cases}$$

用新坐标来表示,

$$T=\frac{1}{3}ml^2[(2+\sqrt{2})\dot{q}_1^2+(2-\sqrt{2})\dot{q}_2^2],$$

$$V=\frac{2}{3}mgl(q_1^2+q_2^2).$$

它们和§6.4中用待定系数所得的结果相比,相差一个公共的比例常数,这是因为§6.4的坐标变换系数没有归一化,但并不影响本征频率的数值.

*§6.6 一维晶格的纵振动

考虑 $N+1$ 个相同的单原子分子,按 0 到 N 编号排列成一个分子链,如图 6.7 所示,每个分子的质量均为 m,相邻分子间的作用力可看成弹性力,劲度系数为 K,非相邻分子间的作用力可忽略不计,求此力学体系在平衡位置作微振动时的频率分布.

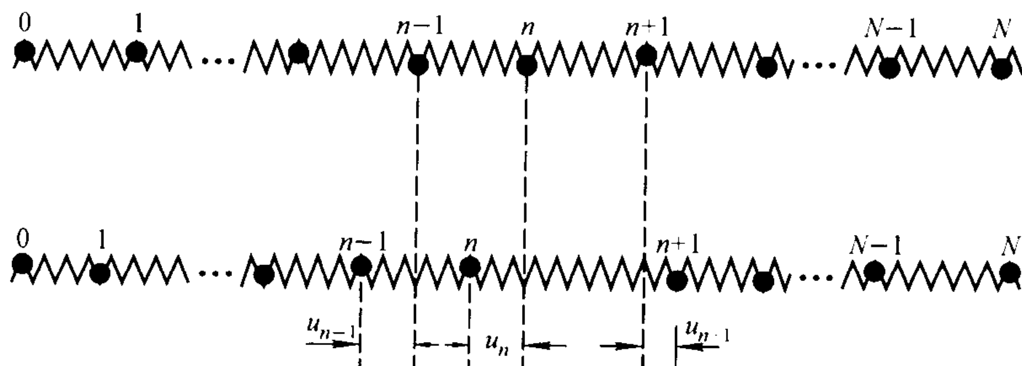


图 6.7

图 6.7 中上图所示的是体系处于平衡位置时的情况,x_n^0 为第 n 个分子的平衡位置,a 为平衡时相邻两原子间的距离,$x_n^0=na$. 下一图为分子作振动时某一瞬时的位置,x_n 为第 n 个分子的坐标,u_n 为它偏离平衡位置的位移

$$u_n=x_n-x_n^0, \tag{6.1}$$

体系平衡时,所有的 u_n 均为零,因此我们可取 u_n 为体系作微振动的广义坐标.

我们用 $F_n^{(n-1)}$ 和 $F_n^{(n+1)}$ 分别表示第 $n-1$ 个分子和第 $n+1$ 个分子对第 n 个分子的作用力,则

$$F_n^{(n-1)} = -K[(x_n - x_{n-1}) - a] = -K(u_n - u_{n-1}),$$
$$F_n^{(n+1)} = -F_{(n+1)}^n = K(u_{n+1} - u_n).$$

所以第 n 个分子所受到的合力为

$$F_n = F_n^{(n+1)} + F_n^{(n-1)} = K(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n). \tag{6.2}$$

由(6.1)式,第 n 个分子的加速度为

$$\ddot{x}_n = \ddot{u}_n.$$

假定边界上(即端点)$n=0$ 和 $n=N$ 的两个分子是固定不动的. 于是体系的运动方程为

$$m\ddot{u}_n = K(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n), \quad n = 1,2,\cdots,N-1, \tag{6.3}$$

并满足边界条件

$$u_0 = 0, \quad u_N = 0. \tag{6.4}$$

此体系的自由度为 $N-1$,根据 § 6.3 的讨论它共有 $N-1$ 个独立的振动频率. 下面我们来求这 $N-1$ 个频率.

按照 § 6.3 所述的标准求解方法,对于方程(6.3)可取 $N-1$ 个试解

$$u_n = A_n \sin \omega t, \ n = 1,2,\cdots,N-1.$$

将它代入(6.3)式后得到关于 ω^2 的 $N-1$ 阶的久期方程. 当 N 很大时,这样的久期方程实际上无法求解. 因此我们要采用其他形式的试解.

不难看到,我们现在的这个问题和 § 6.3 中的例题,在数学结构上除了自由度的数目不一样外,其余完全一样. 因为 $N=4$ 时方程(6.3)的具体形式为

$$\begin{cases} m\ddot{u}_1 = K(u_2 - 2u_1), \\ m\ddot{u}_2 = K(u_3 + u_1 - 2u_2), \\ m\ddot{u}_3 = K(u_2 - 2u_3). \end{cases}$$

如果把 u 改用 y, K 改用 $\frac{F}{a}$ 表示,那么上面这个方程就是 § 6.3 例题中的那个方程. § 6.3 中方程的解已严格求出. 我们是否可以把它的形式改一下,以便推广到 N 很大时的情况呢. 为此我们重新写下 § 6.3 例题的解:

$$\begin{cases} y_1 = A_1^{(1)}\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_1^{(2)}\sin(\omega_2 t + \alpha_2) + A_1^{(3)}\sin(\omega_3 t + \alpha_3), \\ y_2 = \sqrt{2}A_1^{(1)}\sin(\omega_1 t + \alpha_1) - \sqrt{2}A_1^{(3)}\sin(\omega_3 t + \alpha_3), \\ y_3 = A_1^{(1)}\sin(\omega_1 t + \alpha_1) - A_1^{(2)}\sin(\omega_2 t + \alpha_2) + A_1^{(3)}\sin(\omega_3 t + \alpha_3). \end{cases}$$

当初始条件使体系只以一种频率振动，即作简正振动时，上式分别变为

$$\begin{cases} y_1 = A_1^{(1)}\sin(\omega_1 t + \alpha_1), \\ y_2 = \sqrt{2}A_1^{(1)}\sin(\omega_1 t + \alpha_1), \\ y_3 = A_1^{(1)}\sin(\omega_1 t + \alpha_1); \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = A_1^{(2)}\sin(\omega_2 t + \alpha_2), \\ y_2 = 0, \\ y_3 = -A_1^{(2)}\sin(\omega_2 t + \alpha_2); \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = A_1^{(3)}\sin(\omega_3 t + \alpha_3), \\ y_2 = -\sqrt{2}A_1^{(3)}\sin(\omega_3 t + \alpha_3), \\ y_3 = A_1^{(3)}\sin(\omega_3 t + \alpha_3). \end{cases}$$

它们的振动模式分别如图 6.8 中(a)、(b)、(c)所示．当 N 很大时，§6.3 的例题可看成是质量连续分布的横振动，这时相应于图 6.8 的三种振动模式变为如图 6.9 所示，它们都是正弦波，其波长 λ 和波矢 k 分别为

(a)： $$\lambda_1 = 8a,\ k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{\pi}{4a},$$

(b)： $$\lambda_2 = 4a,\ k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = \frac{2\pi}{4a},$$

(c)： $$\lambda_3 = \frac{8}{3}a,\ k_3 = \frac{2\pi}{\lambda_3} = \frac{3\pi}{4a}.$$

利用这三个波矢的表示式，我们可以把上述三种简正振动统一表示为

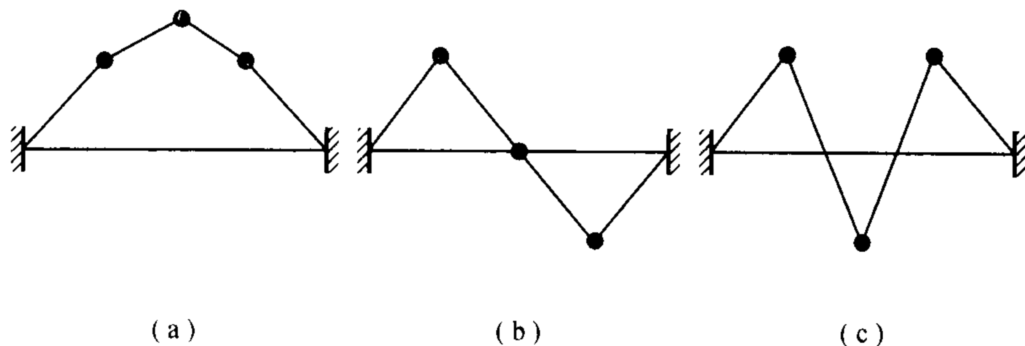
$$y_n = A\sin kna\sin(\omega t + \alpha), \qquad n = 1,2,3.$$

设想随着 n 的增加，简正振动的形式不变．于是方程(6.3)的试解同样可取为

$$u_n = A\sin kna\sin(\omega t + \alpha). \tag{6.5}$$

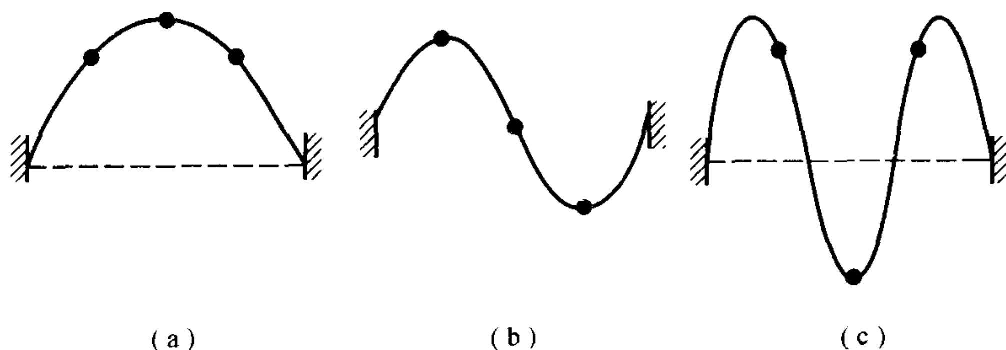
这个试解给出了所有分子的振幅之比，留下的问题是验证(6.5)是否满足方程(6.3)，并求 $N-1$ 个简正频率．

将(6.5)代入(6.3)，得



(a)　　(b)　　(c)

图 6.8



(a) (b) (c)

图 6.9

$$-\omega^2\sin kna = \frac{K}{m}[\sin(kna+ka)+\sin(kna-ka)-2\sin kna]$$
$$=\frac{2K}{m}(\cos ka-1)\sin kna = -\omega_M^2\sin^2\frac{ka}{2}\sin kna, \tag{6.6}$$

式中

$$\omega_M^2=\frac{4K}{m}.$$

这表明如果我们取

$$\omega = \omega_M\sin\frac{ka}{2}, \tag{6.7}$$

则(6.5)确实是方程(6.3)的解，并且 $N-1$ 个频率均可由(6.7)式决定．(6.7)式中的波矢 k 还没有确定，它可由边界条件来决定．因为我们已限定 $n=0$ 和 $n=N$的两个分子是固定的，因此由(6.5)式要求

$$\sin kNa = 0.$$

由此可得

$$kNa = m\pi,$$

或

$$k = \frac{m\pi}{Na},\ m = 1,2,\cdots,N-1. \tag{6.8}$$

将它代入(6.7)式即可得 $N-1$ 个简正频率．当 N 很大时(对 1 mol 物质，$N\approx10^{23}$)，k 可以看成是连续的．这时(6.7)式给出了频率随波矢变化的连续函数．这种函数称为**色散关系**，它在固体物理中有重要的应用，当 k 取最大值 $\frac{(N-1)\pi}{Na}$时，由(6.7)式得

$$\omega=\omega_M\sin\frac{(N-1)\pi}{2N}\approx\omega_M\sin\frac{\pi}{2}=\omega_M.$$

所以由(6.6)式给出的 $\omega_M=\sqrt{\frac{4K}{m}}$是这 $N-1$ 个频率中的最大频率．

*§6.7　多原子分子的振动

作为微振动的另一个应用,本节讨论分子的振动. 一个由 n 个原子所组成的多原子分子可有**平动**、**转动**和**振动**. 把分子看作质点,所对应的运动就是平动. 把分子看作刚体,除了平动,还有转动. 多原子分子各原子间的相对位置不是固定不变的,而是在平衡位置附近作微小振动,这就是**分子振动**. 分子振动指分子中各原子间的相对运动. 分子整体的运动,属于平动范围.

由 n 个原子所组成的分子共有 $3n$ 个自由度,其中 3 个是平动自由度,3 个是转动自由度,其余 $3n-6$ 个是振动自由度;但对线型分子,转动自由度只有 2 个,振动自由度将有 $3n-5$ 个. 平动和转动的问题在以前几章中已经讨论过了. 本节将集中讨论振动问题.

当我们只注意分子的振动问题时,可以把坐标原点取在分子的质心上,并且认为分子的对称轴(通常都取分子的对称轴为坐标轴)的方向是不变的. 我们用 $\boldsymbol{r}_\alpha$ 表示分子中第 α 个原子的位置矢量,$\boldsymbol{r}_{\alpha 0}$ 为其平衡时的位置矢量,$\boldsymbol{u}_\alpha$ 为其偏离平衡位置的位移,即

$$\boldsymbol{r}_\alpha = \boldsymbol{r}_{\alpha 0} + \boldsymbol{u}_\alpha .$$

将上式对时间微商,$\dot{\boldsymbol{r}}_{\alpha 0}$是分子的平动和转动引起的,如果我们不考虑分子的平动和转动,则 $\dot{\boldsymbol{r}}_{\alpha 0}=0$;而 $\dot{\boldsymbol{u}}_\alpha$ 即为第 α 个原子的振动. 所以我们可取 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ 这一组坐标来讨论分子的振动问题. 这一组坐标共有 $3n$ 个. 由于分子受到总动量为零(因为不考虑分子的平动)和总角动量为零(因为不考虑分子的转动)这两个条件的限制,独立的自由度只有 $3n-6$ 个. 下面我们来写出这两个条件给出的"约束"关系.

分子总动量为零的条件可表示为

$$\sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha \dot{\boldsymbol{u}}_\alpha = 0,$$

积分得

$$\sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha \boldsymbol{u}_\alpha = 0. \tag{7.1}$$

由于 $\dot{\boldsymbol{r}}_{\alpha 0}=0$,并考虑到 $\dot{\boldsymbol{u}}_\alpha$ 是小量,当保留到一级小量时,总角动量为零的条件可表示为

$$\boldsymbol{L} = \sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha \dot{\boldsymbol{r}}_{\alpha 0} \times \dot{\boldsymbol{u}}_\alpha = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha \dot{\boldsymbol{r}}_{\alpha 0} \times \boldsymbol{u}_\alpha = 0,$$

积分得

$$\sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha \dot{\boldsymbol{r}}_{\alpha 0} \times \boldsymbol{u}_\alpha = 0. \tag{7.2}$$

(7.1)和(7.2)中没有考虑平动和转动对 $3n$ 个坐标 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n$ 所作的限制,受到这样的限制后,所得到的分子运动仅为分子中各原子在平衡位置的振动.

下面我们举例来解一些简单的多原子分子的振动问题.

【例 1】 求线型三原子对称分子 ABA 的振动频率. 假定分子的势能仅依赖于 A－B 和 B－A的距离及其夹角(图 6.10).

解:根据上面的讨论,共有 $3\times3-5=4$ 个振动自由度,其中 2 个自由度为分子 ABA 保持直线型的纵向振动,2 个为分子扭曲的横向振动,但两个横向振动的频率是相同的. 先讨论纵向振动,取 x_1、x_2 和 x_3 为纵向振动的三个坐标,由(7.1),这三个坐标之间的"约束"关系为

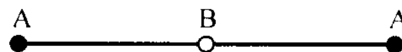


图 6.10

$$m_A(x_1+x_3)+m_B x_2=0. \tag{1}$$

分子作纵向振动的动能、势能为

$$\begin{cases} T_1 = \dfrac{1}{2}m_A(\dot{x}_1^2+\dot{x}_3^2)+\dfrac{1}{2}m_B\dot{x}_2^2, \\ V_1 = \dfrac{1}{2}k_1[(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2], \end{cases} \tag{2}$$

式中 k_1 为分子纵向劲度系数.

从(1)和(2)式可知,x_1、x_2 和 x_3 这三个坐标并不是简正坐标. 根据简正坐标的物理意义,如果能够找到两个相互独立的,只以一种单一频率振动的方式,那么反映这种振动方式的坐标一定是简正坐标. 不难发现,下面两种振动方式是满足这一要求的:

(a) B 原子不动,两个 A 原子相对 B 原子作对称振动,如图 6.11(b)所示. 这种振动恒满足条件 $x_1+x_3=0$.

(b) 两个 A 原子以相同速度向同一方向运动,B 原子则向相反方向运动,如图 6.11(a)所示. 这种振动恒满足条件 $x_1-x_3=0$. 因此

$$\begin{cases} q_1 = x_1+x_3, \\ q_2 = x_1-x_3 \end{cases} \tag{3}$$

一定是简正坐标. 将(1)、(3)代入(2),得

$$L_1 = T_1-V_1 = \frac{m_A m}{4m_B}\dot{q}_1^2+\frac{m_A}{4}\dot{q}_2^2-\frac{k_1 m^2}{4m_B^2}q_1^2-\frac{k_1}{4}q_2^2, \tag{4}$$

式中 $m=2m_A+m_B$ 是整个分子的质量. (4)式表明 q_1 和 q_2 确是三原子对称分子作纵向振动的两个简正坐标,而其简正频率则为

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1 m^2}{4m_B^2}\Big/\frac{m_A m}{4m_B}} = \sqrt{\frac{k_1 m}{m_A m_B}}, \tag{5}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_1}{4}\Big/\frac{m_A}{4}} = \sqrt{\frac{k_1}{m_A}}. \tag{6}$$

ω_1 所对应的就是图 6.11(a)的相对于分子中心的反对称振动,ω_2 所对应的是图 6.11(b)的

相对于分子中心的对称振动.

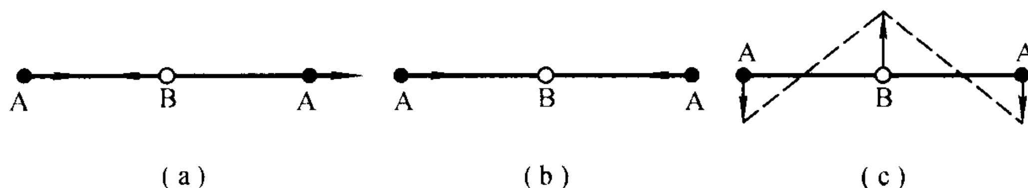


图 6.11

下面讨论分子的横向振动. 在横向振动的情况下,(7.1)式可表示为

$$m_A(y_1 + y_3) + m_B y_2 = 0. \tag{7}$$

而(7.2)式为

$$\sum_{\alpha=1}^{3} m_\alpha \boldsymbol{r}_{\alpha 0} \times \boldsymbol{u}_\alpha = m_A(l\boldsymbol{i} \times y_1\boldsymbol{j}) + m_A(-l\boldsymbol{i} \times y_3\boldsymbol{j}) = m_A l(y_1 - y_3)\boldsymbol{k} = 0.$$

由此得

$$y_1 = y_3, \tag{8}$$

所以横向振动是对称的扭曲振动,如图 6.11(c)所示. 如果我们把分子扭曲所产生的位移用 A、B、A 的夹角对 π 值的偏离 δ 来表示:

$$\delta \approx \frac{1}{l}[(y_1 - y_2) + (y_3 - y_2)], \tag{9}$$

则分子的扭曲势能可表示为

$$V_2 = \frac{1}{2}k_2 l^2 \delta^2. \tag{10}$$

体系横向的振动动能为

$$T_2 = \frac{1}{2}m_A(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_3^2) + \frac{m_B}{2}\dot{y}_2^2. \tag{11}$$

利用(7)、(8)、(9)可将上式中的 $\dot{y}_1$、$\dot{y}_2$ 和 $\dot{y}_3$ 都用 δ 来表示. 经过简单的代数运算可得

$$T_2 = \frac{m_A m_B}{4m} l^2 \dot{\delta}^2.$$

于是分子横向振动的拉格朗日函数为

$$L_2 = \frac{m_A m_B}{4m} l^2 \dot{\delta}^2 - \frac{k_2}{2} l^2 \delta^2. \tag{12}$$

其振动频率

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{k_2}{2}l^2 \Big/ \frac{m_A m_B}{4m}l^2} = \sqrt{\frac{2k_2 m}{m_A m_B}}. \tag{13}$$

【例 2】 求对称的三角形分子 ABA 的振动频率(图 6.12).

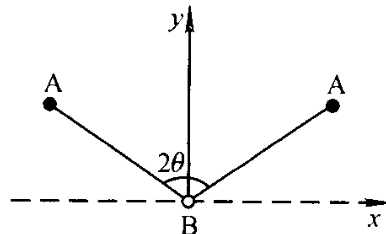


图 6.12

解: 本题属于平面分子,$n = 3$,共有 3 个振动自由度,这三个自由度都在平面内. 用 $\boldsymbol{u}_\alpha = x_\alpha \boldsymbol{i} + y_\alpha \boldsymbol{j}$ 表示第 α 个原子离开平衡位置的位移,则(7.1)式可具体表示为

$$\begin{cases} m_A(x_1 + x_3) + m_B x_2 = 0, \\ m_A(y_1 + y_3) + m_B y_2 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

而(7.2)式则为

$$\sum_{\alpha=1}^{3} m_\alpha \boldsymbol{r}_{\alpha 0} \times \boldsymbol{u}_\alpha = m_A \left[l\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\boldsymbol{i} + l\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\boldsymbol{j} \right] \times (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j}) + m_A \left[l\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\boldsymbol{i} + l\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\boldsymbol{j} \right] \times (x_3\boldsymbol{i} + y_3\boldsymbol{j})$$
$$= m_A l[(y_1 - y_3)\sin\theta - (x_1 + x_3)\cos\theta]\boldsymbol{k} = 0.$$

由此得

$$(y_1 - y_3)\sin\theta = (x_1 + x_3)\cos\theta. \tag{2}$$

用 Δl_1 和 Δl_2 表示原子 A－B 或 B－A 之间距离的改变,其值可由矢量 $\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2$ 和 $\boldsymbol{u}_3 - \boldsymbol{u}_2$ 在$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{BA}$方向的投影来表示:

$$\begin{cases} \Delta l_1 = (x_1 - x_2)\sin\theta + (y_1 - y_2)\cos\theta, \\ \Delta l_2 = -(x_3 - x_2)\sin\theta + (y_3 - y_2)\cos\theta. \end{cases} \tag{3}$$

用 δ 表示 ABA 夹角的改变,δ 的值可由 $\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2$ 和 $\boldsymbol{u}_3 - \boldsymbol{u}_2$ 在垂直于$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{BA}$方向的投影来表示:

$$\delta = \frac{1}{l}[(x_1 - x_2)\cos\theta - (y_1 - y_2)\sin\theta] + \frac{1}{l}[-(x_3 - x_2)\cos\theta - (y_3 - y_2)\sin\theta]. \tag{4}$$

于是分子的势能可写为

$$V = \frac{k_1}{2}(\Delta l_1^2 + \Delta l_2^2) + \frac{k_2}{2}l^2\delta^2, \tag{5}$$

分子的动能可写为

$$T = \frac{1}{2}m_A(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2) + \frac{1}{2}m_B(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2). \tag{6}$$

引入新坐标

$$\begin{cases} q_1 = x_1 + x_3, \\ q_2 = x_1 - x_3, \\ q_3 = y_1 + y_3. \end{cases} \tag{7}$$

则由(1)、(2)和(7)可解得

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(q_1 + q_2), \\ x_2 = -\frac{m_A}{m_B}q_1, \\ x_3 = \frac{1}{2}(q_1 - q_2), \\ y_1 = \frac{1}{2}(q_3 + q_1\cot\theta), \\ y_2 = -\frac{m_A}{m_B}q_3, \\ y_3 = \frac{1}{2}(q_3 - q_1\cot\theta). \end{cases} \tag{8}$$

由(3)、(4)和(8),可将(5)和(6)都用 q_1、q_2、q_3 及其微商来表示. 经过计算后便得分子的拉格朗日函数为

$$L=\frac{m_A}{4}\left(\frac{2m_A}{m_B}+\frac{1}{\sin^2\theta}\right)\dot{q}_1^2+\frac{m_A}{4}\dot{q}_2^2+\frac{m_A m}{4m_B}\dot{q}_3^2-\frac{k_1}{4}\left(\frac{2m_A}{m_B}+\frac{1}{\sin^2\theta}\right)\times$$
$$\left(1+\frac{2m_A}{m_B}\sin^2\theta\right)q_1^2-\frac{1}{4}(k_1\sin^2\theta+2k_2\cos^2\theta)q_2^2-\frac{m^2}{4m_B^2}\times$$
$$(k_1\cos^2\theta+2k_2\sin^2\theta)q_3^2+\frac{m}{2m_B}(2k_2-k_1)\sin\theta\cos\theta q_2q_3. \tag{9}$$

从(9)式可知 q_1 是简正坐标,其对应的频率为

$$\omega_1=\sqrt{\frac{\frac{k_1}{4}\left(\frac{2m_A}{m_B}+\frac{1}{\sin^2\theta}\right)\left(1+\frac{2m_A}{m_B}\sin^2\theta\right)}{\frac{m_A}{4}\left(\frac{2m_A}{m_B}+\frac{1}{\sin^2\theta}\right)}}=\sqrt{\frac{k_1}{m_A}\left(1+\frac{2m_A}{m_B}\sin^2\theta\right)}, \tag{10}$$

其振动形式如图 6.13(a)所示. 坐标 q_2 和 q_3 在一起对应两个振动,这两个振动的频率 ω_2 和 ω_3 由久期方程

$$\omega^4-\omega^2\left[\frac{k_1}{m_A}\left(1+\frac{2m_A}{m_B}\cos^2\theta\right)+\frac{2k_2}{m_A}\left(1+\frac{2m_A}{m_B}\sin^2\theta\right)\right]+\frac{2mk_1k_2}{m_Bm_A^2}=0 \tag{11}$$

的两个根 ω_2^2 和 ω_3^2 决定. 其振动形式如图 6.13(b)和(c)所示. 当 $2\theta=\pi$ 时,由(10)和(11)所得出的结果和例 1 所得到的结果相同.

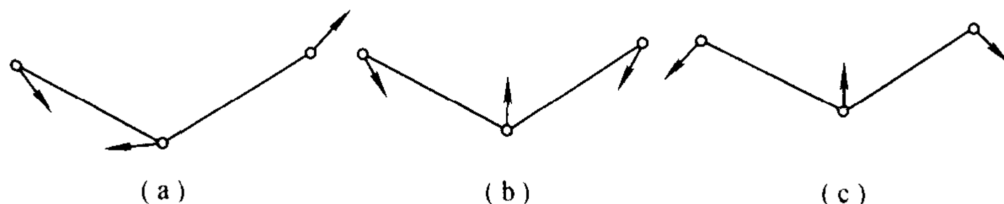


图 6.13

*§6.8 两个自由度体系的强迫振动

上面几节所讨论的都是自由振动. 它适用于像晶格振动、分子振动等一类物理问题. 在工程上多自由度体系的振动问题,往往是由外界强迫力所引起的,而且阻尼不能忽略. 为此,有必要讨论一下多自由度体系的强迫振动和阻尼振动的问题. 这里主要讨论 2 个自由度体系的强迫振动问题. 阻尼振动留到下章讨论.

我们知道,一维强迫振动有两个重要性质:

(1) 一个力学体系在周期性强迫力的作用下,不管初始条件如何,体系最后将按强迫力的频率进行振动.

(2) 当强迫力的频率和体系的固有频率相同时,体系将发生共振现象.

这两个性质对于多自由度体系的振动亦如此,是强迫振动的普遍特性. 为

此,我们讨论如图 6.14 所示的两个耦合振子在正弦力作用下的强迫振动问题.

质量为 m_1 和 m_2 的两个质点,可沿水平方向运动.两个弹簧的劲度系数为 k_1 和 k_2.不考虑摩擦力,在质点 m_1 上作用一个水平的正弦力 $F=F_0\sin\omega_p t$,体系在此力的作用下作强迫振动.

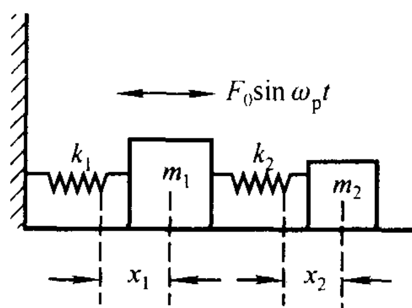


图 6.14

先求体系的固有频率.两个自由度体系作自由振动时的频率由久期方程

$$(b_{11}-a_{11}\omega^2)(b_{22}-a_{22}\omega^2)-(b_{12}-a_{12}\omega^2)^2=0$$

决定.因此我们只要具体写出 a_{11}、b_{11}、a_{22}、b_{22}、a_{12}、b_{12}这 6 个系数的具体表示式即可.为此我们写出图 6.14 所示的体系作自由振动时的动能和势能,取 m_1 和 m_2 离开平衡位置的位移 x_1 和 x_2 为广义坐标,则

$$T=\frac{1}{2}(m_1\dot{x}_1^2+m_2\dot{x}_2^2),$$

$$V=\frac{1}{2}[k_1x_1^2+k_2(x_2-x_1)^2].$$

所以

$$\begin{aligned}&a_{11}=m_1,\quad a_{12}=0,\quad a_{22}=m_2;\\&b_{11}=k_1+k_2,\quad b_{12}=-k_2,\quad b_{22}=k_2.\end{aligned}\tag{8.1}$$

于是得频率方程

$$(k_1+k_2-m_1\omega^2)(k_2-m_2\omega^2)-k_2^2=0.\tag{8.2}$$

引用记号

$$\frac{k_1+k_2}{m_1}=a,\quad \frac{k_2}{m_1}=b,\quad \frac{k_2}{m_2}=c,\tag{8.3}$$

则(8.2)可简化为

$$(a-\omega^2)(c-\omega^2)-bc=0.\tag{8.4}$$

由方程(8.4)所得出的两个根 ω_1^2 和 ω_2^2 即为体系的固有振动频率.

下面转入强迫振动的讨论,利用牛顿第二定律立即可以写出体系在强迫力 F 作用下的运动方程为

$$\begin{cases}m_1\ddot{x}_1=-k_1x_1+k_2(x_2-x_1)+F_0\sin\omega_p t,\\m_2\ddot{x}_2=-k_2(x_2-x_1).\end{cases}$$

采用(8.3)的记号,并令 $F_0/m_1=f_0$,则上式可简化为

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -ax_1 + bx_2 + f_0 \sin \omega_p t, \\ \ddot{x}_2 = cx_1 - cx_2. \end{cases} \tag{8.5}$$

这个方程组的解由两部分组成:一部分是对应的齐次方程的通解(用§6.2的方法很容易求得),这里不再讨论;另一部分是非齐次方程的一个特解.下面来讨论这个特解的性质.

我们可取方程(8.5)的两个特解为

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \sin \omega_p t, \\ x_2 = A_2 \sin \omega_p t. \end{cases} \tag{8.6}$$

代入(8.5)得

$$\begin{cases} -A_1 \omega_p^2 = -aA_1 + bA_2 + f_0, \\ -A_2 \omega_p^2 = cA_1 - cA_2. \end{cases}$$

从上式解出 A_1 和 A_2:

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{f_0(c - \omega_p^2)}{(a - \omega_p^2)(c - \omega_p^2) - bc}, \\ A_2 = \dfrac{f_0 c}{(a - \omega_p^2)(c - \omega_p^2) - bc}. \end{cases} \tag{8.7}$$

这就证明了我们前面指出的强迫振动的两个普遍性质:

(1) 体系确实将以强迫力的频率 ω_p 作振动,其振幅由(8.7)式决定;

(2) 如果(8.7)式中的分母为零,则体系将发生共振.由(8.4)式知这一条件即为 ω_p 等于体系的固有频率 ω_1 或 ω_2.从(8.7)还可得到一个性质:强迫振动的两个振幅之比

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{c - \omega_p^2}{c} \tag{8.8}$$

和体系作自由振动时的振幅之比完全一样,只要将(8.1)代入(2.10)即可看出这一点.

为了清楚地看出强迫振动的振幅 A_1 和 A_2 与干扰力的频率 ω_p 的关系.我们取 $k_1 = k_2, m_1 = 2m_2$ 这样一个特殊情形来考察.这时由(8.3)得

$$a = c = 2\frac{k_1}{m_1} = 2\omega_0^2, \quad b = \frac{k_1}{m_1} = \omega_0^2. \tag{8.9}$$

其中

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}},$$

是图6.14中移去质点 m_2 后质点 m_1 的固有振动频率.将(8.9)代入(8.4),可解得

$$\begin{cases} \omega_1^2 = (2 - \sqrt{2})\omega_0^2 = 0.586\omega_0^2, \\ \omega_2^2 = (2 + \sqrt{2})\omega_0^2 = 3.414\omega_0^2. \end{cases}$$

利用(8.9)的记号，强迫振动的振幅(8.7)式可写成

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{1-\dfrac{\omega_p^2}{2\omega_0^2}}{2\left(1-\dfrac{\omega_p^2}{2\omega_0^2}\right)^2-1}\dfrac{f_0}{\omega_0^2} = \alpha\chi_{st}, \\ A_2 = \dfrac{1}{2\left(1-\dfrac{\omega_p^2}{2\omega_0^2}\right)^2-1}\dfrac{f_0}{\omega_0^2} = \beta\chi_{st}, \end{cases} \tag{8.10}$$

式中

$$\chi_{st} = \frac{f_0}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{k_1},$$

是质点 m_1 在力 F_0 作用下的静位移，和频率 ω_p 无关，而 α 和 β 则只和比值 ω_p/ω_0 有关. 将强迫振动的振幅改写为(8.10)的形式后，要讨论 A_1 和 A_2 与 ω_p 的关系，只要讨论 α 和 β 与 ω_p/ω_0 的关系即可，图 6.15 就是根据(8.10)式所作出的 α 和 β 随 ω_p/ω_0 变化的曲线. 从图中可以看出，当 ω_p 趋近于零时，α 和 β 同时趋近于 1，A_1 和 A_2 和静位移 χ_{st} 一致. 当 ω_p 不断增大时，α 和 β 也随之增大，直到 ω_p 趋近于 ω_1 时而达到无穷大，体系发生共振. 在这个过程中，α 和 β 均为正，所以 m_1 和 m_2 的运动与干扰力同相位. $\omega_p > \omega_1$ 以后，α 和 β 同时变为负，这表示 m_1 和 m_2 的运动与干扰力有一相位差 π，其数值随着 ω_p 的增加逐渐减小，直到 $\omega_p = \sqrt{2}\omega_0$ 时，振幅 A_1 趋近于零，而振幅 A_2 又和静位移 χ_{st} 相同. 此后，随着 ω_p 的继续增大，α 变为正值，而 β 继续保持负值，其绝对值均随 ω_p 的增大而增大，直到 $\omega_p = \omega_2$ 时，α 达到正无穷大，β 达到负无穷大，体系再次发生共振. 当 $\omega_p > \omega_2$ 时，α 和 β 又都立即变号，数值则不断减小，直至趋近于零.

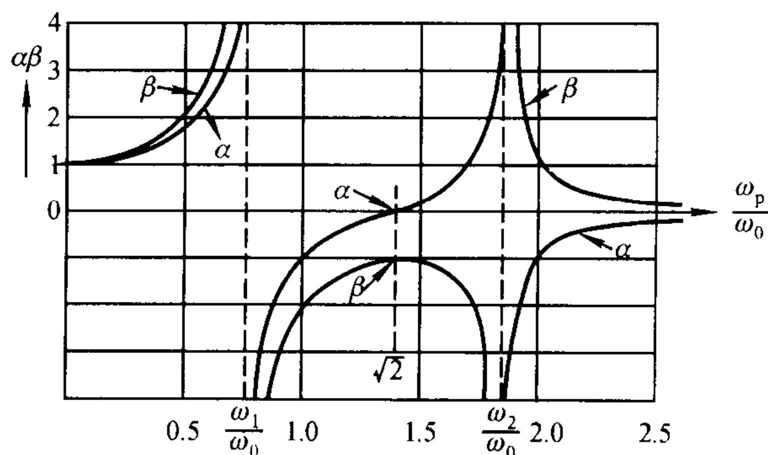


图 6.15

在一定的条件下，质量 m_1 的振幅可以趋近于零的事实具有极大的实用价

值. 例如一台架在横梁上的马达,由于不可避免的不平衡,运转时通常在垂直方向会发生振动. 这种振动是极其有害的. 为了消除这种振动,可在横梁上用弹簧 k_2 挂一附加质量 m_2. 若马达的质量为 m_1,梁的垂直方向的劲度系数为 k_1,那么根据上面的讨论,只要使 k_2 和 m_2 满足下列条件:

$$\frac{k_2}{m_2} = 2\omega_0^2 = 2\frac{k_1}{m_1} = \omega_p^2,$$

则由马达运转而引起的梁的上下振动即可消去. 这种装置称为**动力消振器**.

以上的讨论是以干扰力与 $\sin\omega_p t$ 成正比的假设为前提的,一般的情形下干扰力的形式为 $F_0\sin(\omega_p t+\varepsilon)$,或

$$F = F_1\sin(\omega_{p1}t+\varepsilon_1) + F_2\sin(\omega_{p2}t+\varepsilon_2) + \cdots$$

这时情况就要复杂得多,但其基本性质仍和上面所述的一样. 另外,我们上面只考虑了稳态解,如果还要考虑它的瞬态解,则还应加上体系的自由振动的解,自由振动中的常数 A_1、A_2、α_1、α_2 由体系的初始条件决定.

**§6.9 非线性振动

前几节所讨论的都是线性振动,即动能和势能在平衡位置附近展开成泰勒级数时只保留到 q_i、$\dot{q}_i$ 的二级项,运动方程是线性方程. 本节讨论保留到三级、四级……修正项时,振动方程的求解方法.

先考虑动能和势能都保留到三级小量时的情况. 这时动能 T 中将比线性振动多出一些 $\dot{q}_i\dot{q}_jq_k$ 这样的项,势能 V 中则多出一些 $q_iq_jq_k$ 的项. 假定所选取的广义坐标对于线性振动来说,已经是简正坐标,即 T 和 V 中的二级项中,q_i、$\dot{q}_i$ 只以平方和的形式出现. 因此保留到三级项时,体系的拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\dot{q}_i^2 - \omega_i^2q_i^2) + \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{n}g_{ijk}\dot{q}_i\dot{q}_jq_k - \frac{1}{3}\sum_{i,j,k=1}^{n}h_{ijk}q_iq_jq_k. \tag{9.1}$$

将它代入拉格朗日方程,得

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2q_i = f_i(q,\dot{q},\ddot{q}), \quad i = 1,2,\cdots,n. \tag{9.2}$$

式中 f_i 是由(9.1)中的三级项所产生的,是由 q_jq_k、$q_j\dot{q}_k$、$q_j\ddot{q}_k$、$\dot{q}_j\dot{q}_k$、$\dot{q}_j\ddot{q}_k$ 这样的项所组成的二次齐次函数.

体系在平衡位置附近作振动时,零级近似表示体系在平衡位置静止不动,一级近似为线性振动. 现在是求振动的二级近似. 我们采用逐级近似的方法来求方程(9.2)的解. 设

$$q_i^{(1)} = A_i\sin(\omega_it+\alpha_i), \quad i = 1,2,\cdots,n \tag{9.3}$$

是方程(9.2)的相应的线性振动方程

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2q_i = 0, \quad i = 1,2,\cdots,n$$

的解．我们把方程(9.2)的解写成

$$q_i = q_i^{(1)} + q_i^{(2)}, \quad i = 1,2,\cdots,n. \tag{9.4}$$

将(9.4)代入(9.2)得 $q_i^{(2)}$ 所满足的方程为

$$\ddot{q}_i^{(2)} + \omega_i^2 q_i^{(2)} = f_i(q,\dot{q},\ddot{q}), \quad i = 1,2,\cdots,n. \tag{9.5}$$

由于 $q_i^{(2)}$ 是保留到三级项所引起的修正，因此 $q_i^{(2)} \ll q_i^{(1)}$，所以在方程(9.5)的右边，我们可以近似地用 $q_i^{(1)}$ 来代替 q_i，得

$$\ddot{q}_i^{(2)} + \omega_i^2 q_i^{(2)} = f_i(q^{(1)},\dot{q}^{(1)},\ddot{q}^{(1)}), \quad i = 1,2,\cdots,n \tag{9.6}$$

因 $q_i^{(1)}$ 是已知的，因此方程(9.6)是一个关于 $q_i^{(2)}$ 的非齐次线性方程组．上面已经指出，非线性项 f_i 是 q、$\dot{q}$、$\ddot{q}$ 的二次齐次式，因此由(9.3)可知 $f_i(q^{(1)},\dot{q}^{(1)},\ddot{q}^{(1)})$ 必为一些不同频率的三角函数的和．例如对于其中的 $q_j^{(1)}q_k^{(1)}$ 项，我们有

$$\begin{aligned} q_j^{(1)}q_k^{(1)} &= A_jA_k\sin(\omega_jt + \alpha_j)\sin(\omega_kt + \alpha_k) \\ &= \frac{1}{2}A_jA_k\{\cos[(\omega_j - \omega_k)t + \alpha_j - \alpha_k] - \cos[(\omega_j + \omega_k)t + \alpha_j + \alpha_k]\}. \end{aligned}$$

对于其他的 $q_j^{(1)}\dot{q}_k^{(1)}$、$q_j^{(1)}\ \ddot{q}_k^{(1)}$、$\dot{q}_j^{(1)}\dot{q}_k^{(1)}$ 等项也有类似的结果，所以方程(9.6)的非齐次项都是一些频率为线性振动频率的和与差的三角函数．根据非齐次线性方程的求解理论，方程(9.6)的通解是齐次方程的通解(9.3)再加上一个含有非齐次项的同样周期的三角函数的解．于是体系在平衡位置附近作振动的三级近似解为：在二级近似解 $q_i^{(1)}$ 上再加上频率为组合频率

$$\omega = \omega_i \pm \omega_j \tag{9.7}$$

的附加振动，其中包括倍频($2\omega_i$)和零频(整体平动)，而振幅则和二级近似的线性振动振幅的乘积 A_iA_j 成正比．

现在我们讨论更高一级的近似．这时 T 和 V 的展开式要保留到四级项．如果我们按上述同样的方式来解方程，则在方程(9.2)右边的 f_i 中除了 q_i、$\dot{q}_i$、$\ddot{q}_i$ 的二次项外，还会出现它们的三次项．因而方程(9.6)的非齐次项中将会出现由 3 个简正频率所组成的组合频率

$$\omega = \omega_i \pm \omega_j \pm \omega_k$$

的振动项．这种组合频率中会出现一些和固有频率相同的振动，例如

$$\omega_i + \omega_j - \omega_k.$$

这样方程(9.6)将会出现共振，振幅会随时间无限增长．这不符合物理要求．它表明上述求解方法有缺陷，因此我们要改进上面的求解方法．

用上面的方法求解时，我们以(9.3)作为方程(9.2)的一级近似解，频率 ω_i 取了线性振动的频率．这相当于假定：在求高级近似解时，体系的基本频率不变．这个假定是没有根据的．如果我们用 $\omega_i^{(0)}$ 表示线性振动的简正频率，那么在求各级修正时，体系振动的基本频率的正确表示应为

$$\omega_i = \omega_i^{(0)} + \omega_i^{(1)} + \omega_i^{(2)} + \cdots = \omega_i^{(0)} + \Delta\omega_i, \tag{9.8}$$

因而我们可把计入高级修正后的基本振动 $\cos\omega_it$ 用线性振动的频率 $\omega_i^{(0)}$ 展开：

$$\cos\omega_it = \cos(\omega_i^{(0)} + \Delta\omega_i)t \approx \cos\omega_i^{(0)}t - \Delta\omega_it\sin\omega_i^{(0)}t.$$

若 $\Delta\omega_i \neq 0$，那么当 t 无限增长时，$\Delta\omega_it\sin\omega_i^{(0)}t$ 便会无限增长，和共振项的情况相当．单独出

现这样的项是不合理的；但若和共振项同时出现，那就有可能互相抵消．这就指出了决定 $\Delta\omega_i$ 的方法：用(9.8)作为高级近似解的基本频率时，$\Delta\omega_i$ 可由共振项等于零的要求来决定．

例如自由度为1时，考虑到解的三级近似的非线性振动，取体系的拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{m\omega_0^2}{2}q^2 - \frac{m\alpha}{3}q^3 - \frac{m\beta}{4}q^4. \tag{9.9}$$

为简单起见，我们认为在三级项和四级项中都没有 $\dot{q}$ 出现，只取了 q^3 和 q^4 两项．相应的拉格朗日方程为

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = -\alpha q^2 - \beta q^3. \tag{9.10}$$

我们来寻求方程(9.10)的各级近似解．设

$$q = q^{(1)} + q^{(2)} + q^{(3)}, \tag{9.11}$$

其中

$$q^{(1)} = A\sin\omega t. \tag{9.12}$$

这里我们把初相位取为零，只要适当选取时间起点，总可做到这一点．(9.12)中的 ω 并不等于 ω_0，而应表示为

$$\omega = \omega_0 + \omega^{(1)} + \omega^{(2)}, \tag{9.13}$$

$\omega^{(1)}$ 和 $\omega^{(2)}$ 的值将在求解过程中根据共振项为零的要求依次决定．注意，对于线性振动来说，在(9.10)、(9.11)和(9.13)中，α、$q^{(2)}$、$\omega^{(1)}$ 是一阶小量，β、$q^{(3)}$、$\omega^{(2)}$ 是二阶小量．

让我们先来求二级近似解．即令

$$\begin{cases} q = q^{(1)} + q^{(2)} = A\sin\omega t + q^{(2)}, \\ \omega = \omega_0 + \omega^{(1)}. \end{cases}$$

将它们代入(9.10)，略去二级以上的小量，得 $q^{(2)}$ 所满足的方程为

$$\begin{aligned} \ddot{q}^{(2)} + \omega_0^2 q^{(2)} &= -\alpha A^2\sin^2\omega t + 2\omega_0\omega^{(1)}A\sin\omega t \\ &= -\frac{\alpha A^2}{2} + \frac{\alpha A^2}{2}\cos 2\omega t + 2\omega_0\omega^{(1)}A\sin\omega t. \end{aligned} \tag{9.14}$$

把上述方程看作是 $q^{(2)}$ 所满足的非齐次线性方程，其中非齐次项中的 $\omega^{(1)}$ 未定，它将由方程不应出现共振的条件来决定．显然(9.14)中的共振项是 $2\omega_0\omega^{(1)}A\sin\omega t$，要使共振项不出现，必须

$$\omega^{(1)} = 0. \tag{9.15}$$

这和我们前面所得的结果一致：在非线性振动的二级近似解中，基本频率不发生改变．于是方程(9.14)变为

$$\ddot{q}^{(2)} + \omega_0^2 q^{(2)} = -\frac{\alpha A^2}{2} + \frac{\alpha A^2}{2}\cos 2\omega t.$$

用常规方法可求得这个方程的特解为

$$q^{(2)} = -\frac{\alpha A^2}{2\omega_0^2} - \frac{\alpha A^2}{6\omega_0^2}\cos 2\omega t. \tag{9.16}$$

现在再来求三级近似解．取

$$q = q^{(1)} + q^{(2)} + q^{(3)} = A\sin\omega t - \frac{\alpha A^2}{2\omega_0^2} - \frac{\alpha A^2}{6\omega_0^2}\cos 2\omega t + q^{(3)},$$

$$\omega = \omega_0 + \omega^{(1)} + \omega^{(2)} = \omega_0 + \omega^{(2)}.$$

代入方程(9.10),略去三级以上小量得 $q^{(3)}$ 所满足的方程

$$\ddot{q}^{(3)}+\omega_0^2 q^{(3)}=A^3\left(\frac{\beta}{4}+\frac{\alpha^2}{6\omega_0^2}\right)\sin 3\omega t+A\left(2\omega_0\omega^{(2)}+\frac{5\alpha^2A^2}{6\omega_0^2}-\frac{3A^2\beta}{4}\right)\sin\omega t.\tag{9.17}$$

要使上面的方程不出现共振,$\sin\omega t$ 项的系数必须为零. 由此得

$$\omega^{(2)}=\left(\frac{3\beta}{8\omega_0}-\frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3}\right)A^2.\tag{9.18}$$

这表明频率的二次修正不等于零,其大小正比于振幅的平方. 于是方程(9.17)简化为

$$\ddot{q}^{(3)}+\omega_0^2 q^{(3)}=A^3\left(\frac{\beta}{4}+\frac{\alpha^2}{6\omega_0^2}\right)\sin 3\omega t.$$

按常规方法解此方程得

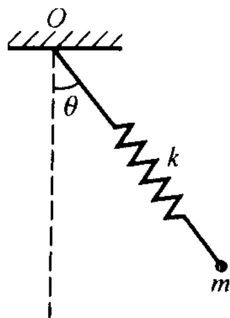
$$\begin{aligned}q^{(3)}&=\frac{A^3\left(\frac{\beta}{4}+\frac{\alpha^2}{6\omega_0^2}\right)}{\omega_0^2-9\left[\omega_0+\left(\frac{3\beta}{8\omega_0}-\frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3}\right)A^2\right]^2}\sin 3\omega t\\&\approx-\frac{A^3}{16\omega_0^2}\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha^2}{3\omega_0^2}\right)\sin 3\omega t.\end{aligned}\tag{9.19}$$

习　　题

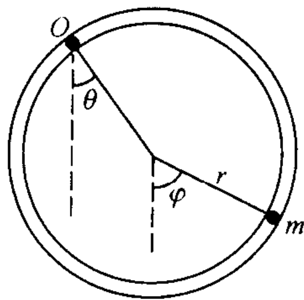
6.1 质量为 m 的质点,用一固有长度为 l,劲度系数为 k,质量可以忽略的弹簧悬挂于 O 点,质点约束在铅直平面内运动,如图所示,求体系作微振动时的振动频率.

6.2 一半径为 r 质量为 m' 的光滑细圆管可在铅直平面内绕其边上的一点 O 自由转动,管中有一质量为 m 的质点,求体系作微振动时的简正频率和简正坐标.

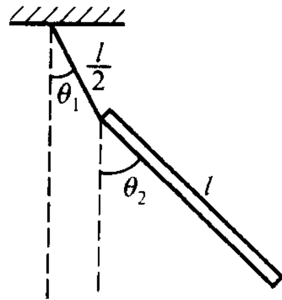
6.3 长为 l,质量为 m 的均匀棒,用一长为 $\frac{l}{2}$,质量可忽略的绳子挂在 O 点,体系在铅直平面内作微振动,求体系的振动频率,并画出体系作简正振动时的模式.



题 6.1 图



题 6.2 图

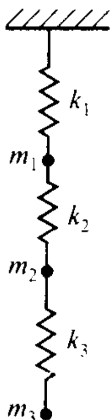


题 6.3 图

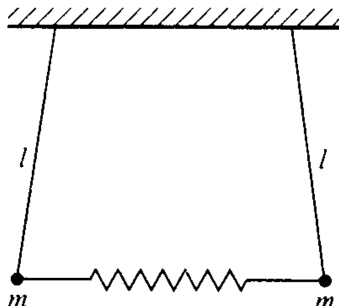
6.4 质量为 m_1、m_2 和 m_3 的三个质点,分别用劲度系数为 k_1、k_2 和 k_3 的三个弹簧依次连接起来悬挂于 O 点,写出体系在平衡位置附近作纵向微振动的运动方程.

6.5 两根长均为 l、质量均为 m 的单摆,在铅直平面内用劲度系数为 k 的无重弹簧耦合在一起. 设平衡时两质点间的距离正好等于弹簧的固有长度,求此系统作微振动的频率.

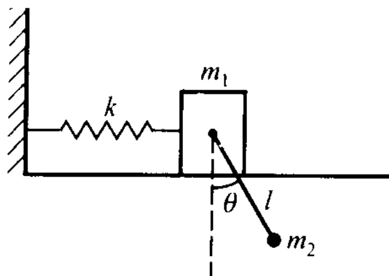
6.6 有一弹簧连着一个质量为 m_1 的滑块，滑块可沿光滑水平直线自由滑动，在滑块上系有一摆长为 l，质量为 m_2 的单摆，求体系的振动频率.



题 6.4 图



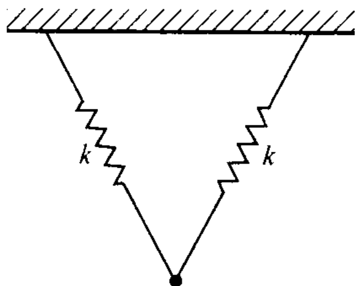
题 6.5 图



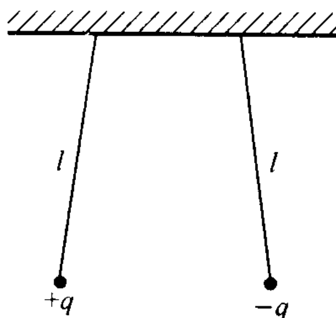
题 6.6 图

6.7 质量为 m 的质点用两个固有长度为 l，劲度系数为 k 的弹簧悬挂在相距为 l 的同一水平线上的两个固定点，求质点在光滑水平面内的振动频率.

6.8 质量为 m、摆长为 l 的两个相同单摆悬挂在同一水平线上相距为 d 的两个固定点，两个摆锤带有等量异号电荷. 求体系作微振动的频率.



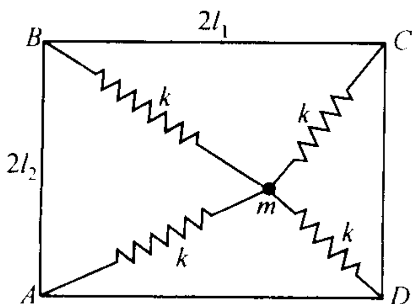
题 6.7 图



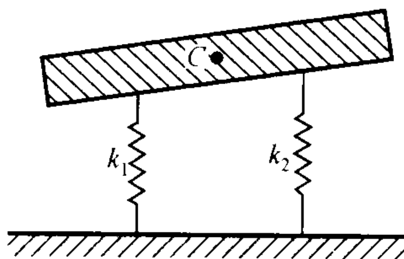
题 6.8 图

6.9 质量为 m 的质点系着四个固有长度 $l_0=\sqrt{l_1^2+l_2^2}$ 的弹簧，这四个弹簧分别固定在边长为 $2l_1$ 和 $2l_2$ 的水平矩形平面的四个顶点上，求质点作微振动的频率.

6.10 汽车在铅直平面内的振动可以简化为如图所示的质量为 m 的平板支承在两个弹簧上的运动，求体系的振动频率.



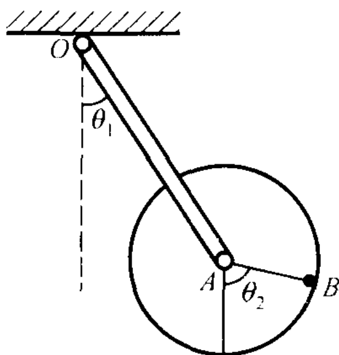
题 6.9 图



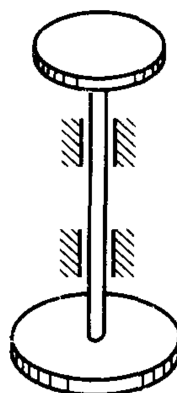
题 6.10 图

6.11 重量可以忽略的杆 OA 长 1.5 m,可绕过 O 点的水平轴自由转动,在 A 端装有一个质量为 2 kg,半径为 0.5 m 的匀质圆盘,在圆盘的边缘 B 点粘有一个质量为 1 kg 的质点 B,圆盘可绕 A 点自由转动,求体系作振动的频率.

6.12 弹性杆扭转时存在恢复力矩,其大小和扭转角度成正比,比例系数称为**扭转系数**.今有如图所示的扭振系统,两个圆盘的转动惯量分别为 I_1 和 I_2,中间用一质量可忽略的弹性圆轴相连,求圆盘作扭转振动的频率.



题 6.11 图



题 6.12 图

6.13 计算线型非对称分子 ABC 的振动频率.

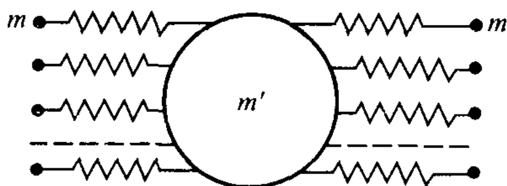
6.14 设一体系的拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{\omega_0^2}{2}(x^2 + y^2) + \alpha xy,$$

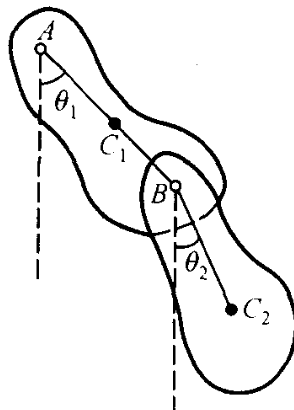
它表示两个固有频率为 ω_0 的一维振子以相互作用 αxy 耦合起来. 求体系的振动频率.

6.15 如图所示的一个一维运动的力学体系,由一个质量为 m' 和 n 个质量为 m 的质点组成,每个 m 和 m' 之间均用相同的无质量的弹簧相连,弹簧的劲度系数为 k,求体系的振动频率.

***6.16** 双复摆,设物体 AC_1 可绕固定点 A 在铅直平面内摆动,物体 BC_2 和物体 AC_1 在 B 点用铰链相连,C_1 和 C_2 为这两个物体的重心,AC_1B 在一直线上,求此体系的振动频率和振幅之比.



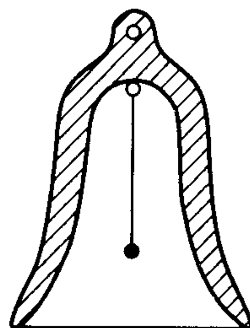
题 6.15 图



题 6.16 图

*6.17 哑钟. 如图所示一架钟,若钟舌的重心和钟身的振动中心重合,则钟将不能打响而成为一架哑钟,试证明之.

提示:把此体系看成一个双摆,利用上题的结果,证明在钟舌的重心和钟身的振动中心重合时可使 $\theta_1/\theta_2=1$,因此钟就不能打响,强迫振动不会改变振幅之比,钟同样不能打响.



题 6.17 图

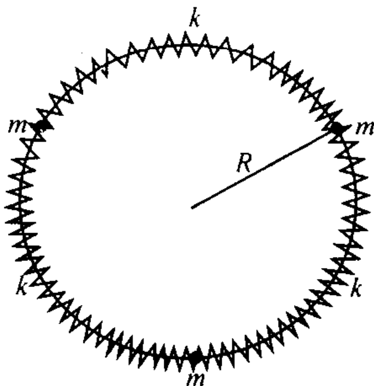
6.18 设具有三个广义坐标 q_1、q_2、q_3 的力学体系产生微振动,其动能 T 和势能 V 可写为

$$T=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2),$$

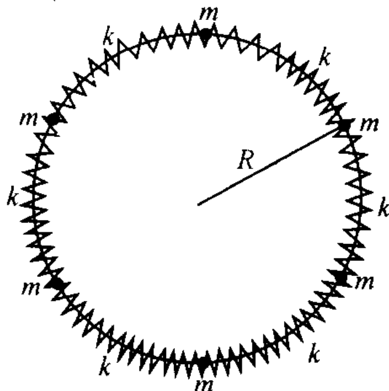
$$V=-q_1q_2-q_2q_3+2q_1^2+\frac{5}{2}q_2^2+2q_3^2,$$

已知 $t=0$ 时,$q_1=q_{10}$,$q_2=q_{20}$,$q_3=q_{30}$,$\dot{q}_1=\dot{q}_2=\dot{q}_3=0$. 求此体系的运动.

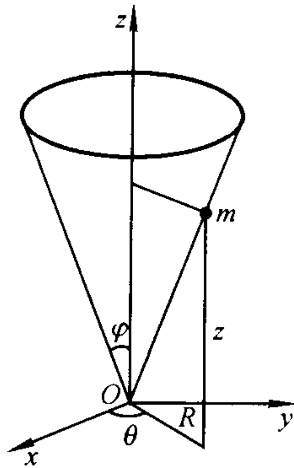
*6.19 三根劲度系数为 k、自然长度为$\frac{2\pi}{3}R$ 的轻质弹簧,相互连结着质量为 m 的三个小球,并组成半径为 R 的圆环. 假设小球只能沿着这个圆轨道无摩擦地运动,试求体系的简正频率并讨论每一个简正模式的物理意义.



题 6.19 图



题 6.20 图



题 6.21 图

*6.20 若将上题中三个耦合振子扩充为六个耦合振子(弹簧的自然长度为$\frac{\pi}{3}R$),试求体系的简正模式和简正频率.

6.21 半顶角为 φ 的圆锥铅直倒立固定在 O 点,质量为 m 的质点被约束在圆锥面上作无摩擦地滑动. (1) 求质点的拉格朗日函数及运动方程;(2) 求质点作稳定圆轨道运动时的圆半径 r_0;(3) 经微扰,质点是否能绕此圆轨道作简谐振动? 若可,其振动频率 $\omega_0=$?

第七章　阻 尼 运 动

各种实际力学问题或多或少都存在阻尼. 阻尼的物理机制很复杂,没有一个统一的阻力表示式. 因此本章首先讨论如何选取适当的阻力表示式,并在此基础上讨论四类最常见的阻尼运动:(1)恒力作用下的阻尼直线运动;(2)阻尼振动,包括非线性振动对共振的影响;(3)*RLC* 电路的拉格朗日方程;(4)阻尼介质中的抛射体运动.

§7.1　阻尼的一般性质

通常的物体在运动时总要受到一定的阻力的作用. 如果没有任何别的力的作用,阻力最后将迫使物体趋向静止. 轮船、火车等在行进时,突然切断其能源,在滑行一段距离之后,各种阻力的作用将使其停止下来.

讨论物体运动时,如果阻力与作用于物体的其他一些力相比非常小,略去阻力不会引起大的错误,则可先将阻力略去不计,使问题比较容易求解. 如果阻力对运动有显著的影响,例如轮船在水中航行,汽车在路上行驶,子弹在空中飞行;或者问题的精确度要求很高,要考虑长时间的积累效应,例如人造卫星的运行等等,这些情况下阻力就不能忽略.

物体在运动中受到的阻力 F,其真正的性质是相当复杂的,通常阻力可以分成四类:

(1) 摩擦阻力. 固体和固体接触面间的阻力,即通常所说的摩擦力. 早在18世纪末,库仑(C. A. de Coulomb, 1736—1806)就总结了三条摩擦定律:

① 在干燥清洁的状态下,固体与固体间的静摩擦力,与正压力成正比,而与外表接触面积的大小无关,即

$$F = \mu_s F_N, \tag{1.1}$$

式中 μ_s 称为**静摩擦因数**,F_N 为垂直于接触面的正压力.

② 在同样的状态下,固体与固体间有相对滑动时,摩擦力仍与正压力成正比,而和相对速度的大小无关,即

$$F = \mu_k F_N, \tag{1.2}$$

式中 μ_k 为**滑动摩擦因数**.

③ 静摩擦力大于滑动摩擦力. 摩擦因数和滑动速度的关系如图 7.1 所示.

对摩擦阻力的物理解释,早期认为完全是由于接触面凹凸不平啮合所致,后来逐渐认为摩擦阻力主要来自表面层分子间的粘合力. 二者都能解释库仑摩擦定律. 但按凹凸说,摩擦因数与物性无关;按粘合说,摩擦因数本质上是由物性决定的.

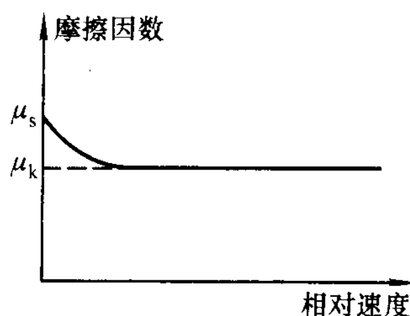


图 7.1

(2) 粘滞阻力. 由流体的粘滞性所产生的阻力. 物体在流体中运动时,由于流体的内摩擦力,靠近物体表面的一层流体要跟随流体运动,因此物体的一部分动量要转移给周围的介质,使物体的动量减少,这等效于物体受到一个阻力的作用. 从理论和实验两方面都能证实这种情况下的阻力与速度的一次方成正比,即

$$F = -cv . \tag{1.3}$$

小球通过流体的斯托克斯(Stokes)定律

$$F = -3\pi d\eta v \tag{1.4}$$

即是一例,式中 d 为小球直径,η 为介质的粘度.

(3) 尾流阻力. 当物体穿过静止不动的介质,或者说,当流体流过一静止不动的障碍物时,由于流线受到阻塞,物体的头部就受到动压力的作用,而流线则在物体头部分开,直到绕过物体之后也不一定重新汇合起来,结果便在物体尾部形成涡旋,使物体头尾两部分发生显著的压力差,头部压力大于尾部压力,使物体受到一个与运动方向相反的合力,这就是**尾流阻力**. 牛顿针对这种情形,最早提出一个与速度平方成正比的阻力函数:以速度 v 在流体内运动的物体,在单位时间内一定要把自己的速度传递给周围质量为 $\rho v\sigma$ 的流体,这里 ρ 是流体的密度,σ 是物体与运动方向垂直的截面积,这种速度传递所需要的力应与其动量 $mv=(\rho v\sigma)v$ 的变化率成正比,由此即可推得物体受到的阻力与速度 v 的平方成正比.

(4) 波阻力. 对于运动速度超过声速的物体,会形成自物体发射到周围介质中的波,它要消耗物体的能量,由此所产生的阻力即为**波阻力**. 波阻力对于以超声速在空气中运动的物体极为重要.

产生以上各种阻力的根源是极端复杂的,而且各不相同,要说它们之间有何共同点,那只有能量的转换了,即每一种阻力都是以不同形式使能量从运动物体向周围介质散逸,最后转化为热. 正是由于这一点,阻力常被称作耗散力.

从纯力学的观点看,重要的是怎样建立总的阻力表示式. 不论何种情况,阻力的方向恒和物体运动的方向相反,其大小与物体的形状和尺寸、周围介质的物

性以及物体运动的速度有关. 因此很自然地可把物体所受的总阻力表示为

$$F = - cf(v) , \tag{1.5}$$

其中函数 $f(v)$反映阻力随速度的变化关系,系数 c 则和物体的形状、大小、表面状况及介质的物性有关.

在实用上,如果摩擦阻力是主要的,则(1.5)式可用(1.1)和(1.2)式代替. 如果物体在粘滞流体中运动,其雷诺数 $Re = \frac{vd}{\nu} < 1.0$($v$ 为物体运动速度,d 为特征尺寸,如小球的直径、飞机的翼展等表征物体大小数量级的一个量,$\nu = \frac{\eta}{\rho}$是流体的运动粘度),则(1.5)式可用速度一次律(1.3)式代替. 在其他各种情况下,只要物体的运动速度不是接近声速和超过声速,(1.5)式一般都可用速度二次律来代替,并且具体表示为

$$F = - \frac{1}{2} c\rho\sigma v^2 . \tag{1.6}$$

其中 ρ 和 σ 的意义如前所述,分别为介质密度和垂直于运动方向物体的截面积,c 称为**阻力系数**,其大小由物体的几何形状决定,例如对于面对气流运动的圆盘,$c = 1.12$,对于张开的降落伞,$c = 1.33$. 对于运动速度接近和超过声速的抛射体,我们也可用(1.6)式来表示物体所受的总阻力,但这时阻力系数 c 不再看成是常数,而是物体运动速度的函数. c 和 v 的关系一般由实验曲线确定. 图7.2是步枪子弹阻力系数的典型曲线,从图中可以看到,当子弹的速度从亚音速向超音速过渡时,阻力系数有显著的增长,直到速度很大时才重新趋近某一恒定值.

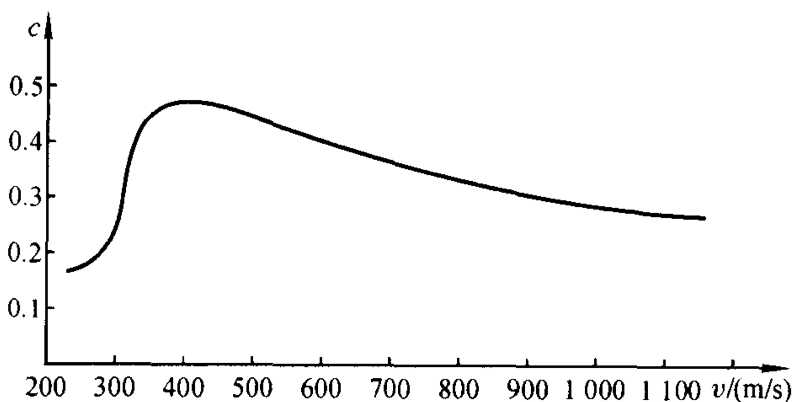


图 7.2

§7.2 恒力作用下的阻尼直线运动

最简单的一类阻尼运动是无其他外力或仅受恒力作用的阻尼直线运动，如空气中的自由落体，静水中的泥沙沉淀，车、船、飞机的直线运动等，都属于这一类问题．由(1.5)式，这一类问题的运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=F_0-cf(v)\ ,$$

或

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\alpha-2\beta f(v)\ . \tag{2.1}$$

式中 $\alpha=F_0/m$ 是由恒力 F_0 所产生的加速度，$2\beta=c/m$ 称为阻尼因子，当 c 不变时也是一个常量．若 c 和速度有关，则 β 也是速度 v 的函数．因此不论何种情况，(2.1)式右端只是速度 v 的函数，可通过分离变量的方法对(2.1)式进行积分，得

$$t=\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{\alpha-2\beta f(v)}\ . \tag{2.2}$$

再根据 $\mathrm{d}x=v\mathrm{d}t$，又可得

$$x=\int_{v_0}^{v}\frac{v\mathrm{d}v}{\alpha-2\beta f(v)}\ . \tag{2.3}$$

算出上面这两个积分后，总可以从中消去 v 而得到函数 $x=f(t)$，物体的运动情况就完全决定．

由方程(2.1)可知，不论物体的初速度如何，只要物体的速度 v 达到了某一值 v_∞，使

$$f(v_\infty)=\frac{\alpha}{2\beta}\ , \tag{2.4}$$

则物体的加速度 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ 将为零，速度就不再变化．满足方程(2.4)的速度 v_∞ 称为物体的**极限速度**或**收尾速度**．例如轮船或火车，当它开足马力加速到上述收尾速度之后便不再增速，而以恒速行进，此后发动机发出的能量将全部用来克服阻力．

下面就几种特殊情形来讨论方程(2.2)和(2.3)的解．先讨论阻力和速度成正比的情形，此时方程(2.2)和(2.3)可写成

$$t=\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{\alpha-2\beta v} \tag{2.5}$$

和

$$x = \int_{v_0}^{v} \frac{v\mathrm{d}v}{\alpha - 2\beta v}, \tag{2.6}$$

α 和 β 都为常量. 计算(2.5)式的积分得

$$t = \frac{1}{2\beta}\ln\frac{\alpha - 2\beta v_0}{\alpha - 2\beta v}. \tag{2.7}$$

此式可写成另一形式:

$$v = \frac{\alpha}{2\beta} - \left(\frac{\alpha}{2\beta} - v_0\right)\mathrm{e}^{-2\beta t}. \tag{2.8}$$

这就是速度随时间变化的方程式. 以 $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 代入(2.8)式可得

$$\mathrm{d}x = \frac{\alpha}{2\beta}\mathrm{d}t - \left(\frac{\alpha}{2\beta} - v_0\right)\mathrm{e}^{-2\beta t}\mathrm{d}t. \tag{2.9}$$

设 $t=0$ 时, $x=0$, 积分上式得

$$x = \frac{\alpha}{2\beta}t - \frac{1}{2\beta}\left(\frac{\alpha}{2\beta} - v_0\right)(1 - \mathrm{e}^{-2\beta t}). \tag{2.10}$$

这就是位移随时间变化的方程式.

(2.8)式表明, 当 $t\to\infty$ 时, $v = \alpha/2\beta$, 它就是上面所指出的极限速度 v_∞. 所以从理论上讲, 物体要达到极限速度, 需要无限长的时间. 实际上由于 v 随 t 是以指数规律衰减的, 到达极限速度所需的时间主要决定于阻尼因子 β, 可以认为当 $2\beta t>3$ 时, 物体已经达到了极限速度. 另外, 当 $t\to\infty$ 时, 由(2.10)式可得

$$x = v_\infty t - \frac{v_\infty - v_0}{2\beta}, \tag{2.11}$$

这是一条直线方程, 它是曲线(2.10)的渐近线. 图 7.3 和图 7.4 分别给出了根据方程(2.8)和(2.10)所绘的曲线. 从图 7.4 可看出, 在 t 较大时, x 随 t 的变化规律可看成是一有虚设初位移 $x_0 = (v_\infty - v_0)/2\beta$ 的匀速直线运动.

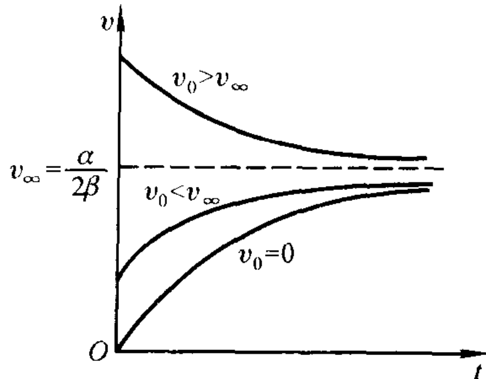


图 7.3

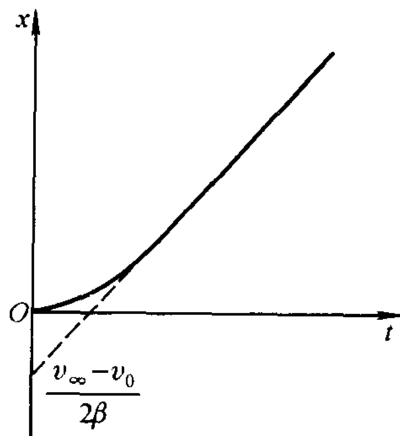


图 7.4

如粘滞力 $F = -cv$ 是物体所受的唯一作用力, 那么可令方程(2.8)和

(2.10)中的 $\alpha=0$,得

$$v = v_0 e^{-2\beta t}, \tag{2.12}$$

$$x = \frac{v_0}{2\beta}(1 - e^{-2\beta t}). \tag{2.13}$$

从这两个方程可知,受这一类阻力作用时,要使物体趋向静止,从理论上讲,需要无限长的时间,但经过的路程却是有限的,等于 $v_0/2\beta$.

现在我们利用上述结果来讨论淤泥或微粒在静水中或雾点在空气中滞沉的情形. 在这种情况,阻力采用(1.4)的形式. 设 ρ_1 为质点的密度,ρ_2 为介质的密度,则

$$\alpha = \frac{F_0}{m} = \frac{(\rho_1 - \rho_2)\frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 g}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 \rho_1} = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1}g,$$

$$2\beta = \frac{c}{m} = \frac{3\pi d\eta}{m} = \frac{18\eta}{\rho_1 d^2}.$$

由此得出收尾速度 v_∞ 为

$$v_\infty = \frac{\alpha}{2\beta} = \frac{\rho_1 - \rho_2}{18\eta}gd^2. \tag{2.14}$$

此式表明,同样物质的微粒在同样的粘滞流体中,在重力的作用下下落时,颗粒大的微粒的速度比颗粒小的微粒的速度要大,极限速度是和微粒线度的平方成正比的.

【例 1】 求初速为零,密度 $\rho=3\times10^3\ \mathrm{kg/m^3}$,直径 $d=3\times10^{-5}\ \mathrm{m}$ 的微粒,在 20 ℃ 的静水($\eta=0.001\ \mathrm{Pa\cdot s}$)中下沉 20 m 所需的时间.

解:先求极限速度,由(2.14)式得

$$v_\infty = \frac{3\times10^3 - 1\times10^3}{18\times0.001}\times9.80\times(3\times10^{-5})^2\ \mathrm{m/s} \approx 0.001\ \mathrm{m/s}.$$

阻尼因子 β 的值

$$2\beta = \frac{18\eta}{\rho_1 d^2} = \frac{18\times0.001}{3\times10^3\times(3\times10^{-5})^2}\ \mathrm{s^{-1}} = \frac{2}{3}\times10^4\ \mathrm{s^{-1}}.$$

于是由(2.11)即可求得下落的时间

$$t = \left(x + \frac{v_\infty - v_0}{2\beta}\right)\Big/ v_\infty \approx \frac{x}{v_\infty} = \frac{20}{0.001}\ \mathrm{s} = 20\,000\ \mathrm{s}.$$

下面再讨论阻力和速度平方成正比的情形,这时需要讨论两种情形:(1)恒力的方向和物体运动的方向一致($\alpha>0$),例如下落物体;(2)恒力的方向和物体运动的方向相反($\alpha<0$),例如垂直上抛的物体. 这两种情况所得出的积分有不同的形式.

先讨论 $\alpha>0$ 的情形. 这时(2.2)和(2.3)可写为

$$t = \int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{\alpha - 2\beta v^2} = \frac{v_\infty^2}{\alpha}\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v_\infty^2 - v^2}, \tag{1}$$

$$x = \int_{v_0}^{v} \frac{v\mathrm{d}v}{\alpha - 2\beta v^2} = \frac{v_\infty^2}{\alpha}\int_{v_0}^{v} \frac{v\mathrm{d}v}{v_\infty^2 - v^2}, \tag{2}$$

式中

$$v_\infty = \sqrt{\frac{\alpha}{2\beta}}$$

是收尾速度. 将(1)和(2)进行积分得

$$t = \frac{v_\infty}{\alpha}\left[\operatorname{arth}\left(\frac{v}{v_\infty}\right) - \operatorname{arth}\left(\frac{v_0}{v_\infty}\right)\right], \tag{3}$$

$$x = \frac{v_\infty^2}{2\alpha}\ln\frac{v_\infty^2 - v_0^2}{v_\infty^2 - v^2}. \tag{4}$$

如果物体是从静止状态开始运动的,由上面两个方程可得

$$v = v_\infty \operatorname{th}\left(\frac{\alpha t}{v_\infty}\right), \tag{5}$$

$$x = \frac{v_\infty^2}{2\alpha}\ln\frac{v_\infty^2}{v_\infty^2 - v^2}. \tag{6}$$

由此两式消去 v 得

$$x = \frac{v_\infty^2}{\alpha}\ln \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha t}{v_\infty}\right). \tag{7}$$

下面讨论 $\alpha<0$ 的情况. 此时(2.2)和(2.3)可写为

$$t = -\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{\alpha' + 2\beta v^2} = \frac{v_\infty^2}{\alpha'}\int_{v}^{v_0}\frac{\mathrm{d}v}{v_\infty^2 + v^2},$$

$$x = -\int_{v_0}^{v}\frac{v\mathrm{d}v}{\alpha' + 2\beta v^2} = \frac{v_\infty^2}{\alpha'}\int_{v}^{v_0}\frac{v\mathrm{d}v}{v_\infty^2 + 2v^2}.$$

式中 $\alpha' = |\alpha| > 0$, $v_\infty = \sqrt{\dfrac{\alpha'}{2\beta}}$. 算出以上两个积分,得

$$t = \frac{v_\infty}{\alpha'}\left[\arctan\left(\frac{v_0}{v_\infty}\right) - \arctan\left(\frac{v}{v_\infty}\right)\right], \tag{8}$$

$$x = \frac{v_\infty^2}{2\alpha'}\ln\frac{v_\infty^2 + v_0^2}{v_\infty^2 + v^2}. \tag{9}$$

当物体在阻力和恒力的联合作用下,速度由 v_0 逐渐减少到 $v=0$ 时,所需的时间和经过的距离可由(8)和(9)分别得出:

$$t = \frac{v_\infty^2}{\alpha'}\arctan\left(\frac{v_0}{v_\infty}\right), \tag{10}$$

$$x = \frac{v_\infty^2}{2\alpha'}\ln\left(1 + \frac{v_0^2}{v_\infty^2}\right). \tag{11}$$

此后物体将向反方向运动,这时(8)和(9)不再适用,而属于 $\alpha>0$ 的情况了.

【例 2】 伞兵从高空跳伞,总质量 100 kg,设阻力

$$F = -\frac{1}{2}\rho\sigma c v^2.$$

已知空气 $\rho = 1.293\ \mathrm{kg/m^2}$,降落伞未打开时截面积 $\sigma_1 = 0.8\ \mathrm{m^2}$,阻力系数 $c_1 = 1.00$,降落伞

打开后，$\sigma_2 = 18\ \mathrm{m}^2$，$c_2 = 1.33$，求两种情况下伞兵下落的极限速度 $v_{1\infty}$ 和 $v_{2\infty}$；若伞兵延迟开伞，在达到极限速度 $v_{1\infty}$ 时再打开降落伞，问经过多少时间后速度可减小到 $1.1v_{2\infty}$，在此时间内下落的距离是多少？

解：降落伞打开前后的 α 值是相同的，

$$\alpha = \frac{F_0}{m} = g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}.$$

降落伞未打开时，阻尼因子

$$2\beta_1 = \frac{\frac{1}{2}c_1\rho\sigma_1}{m} = 0.52 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}^{-1},$$

降落伞打开后阻尼因子

$$2\beta_2 = \frac{\frac{1}{2}c_2\rho\sigma_2}{m} = 15.5 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}^{-1}.$$

由(2.17)式，得两种情况下的极限速度为

$$v_{1\infty} = \sqrt{\frac{\alpha}{2\beta_1}} \approx 43.4\ \mathrm{m/s},$$

$$v_{2\infty} = \sqrt{\frac{\alpha}{2\beta_2}} \approx 7.9\ \mathrm{m/s}.$$

若伞兵延迟开伞，在到达极限速度 $v_{1\infty}$ 后再打开降落伞，则速度从 $v_{1\infty}$ 减到 $1.1v_{2\infty}$ 所需的时间可由上例(1)式求得：

$$t = \frac{v_2^2}{\alpha}\int_{v_{1\infty}}^{1.1v_{2\infty}} \frac{\mathrm{d}v}{v_{2\infty}^2 - v^2} \approx 1.1\ \mathrm{s}.$$

在这段时间内所经过的距离可由上例(2)式求得：

$$x = \frac{v_2^2}{\alpha}\int_{v_{1\infty}}^{1.1v_{2\infty}} \frac{v\mathrm{d}v}{v_{2\infty}^2 - v^2} \approx 15.7\ \mathrm{m}.$$

§7.3 一维阻尼振动

取体系的平衡位置为广义坐标原点，并假定阻力是速度的一次函数(线性振动)，则物体的运动方程为

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x}. \tag{3.1}$$

式中 k 是劲度系数. 用 m 除上式两端，并引入记号

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \tag{3.2}$$

则方程(3.1)可改写为

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{3.3}$$

ω_0 是在没有阻力时物体自由振动的频率.

可根据解常系数线性方程的一般法则求解方程(3.3). 设

$$x = e^{\lambda t},$$

得微分方程(3.3)的特征方程为

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0,$$

它的根为

$$\lambda = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}.$$

于是得方程(3.3)的通解为

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{3.4}$$

为了讨论这个解的物理意义,需要区别两种情况:

$$\beta < \omega_0 \text{ 和 } \beta > \omega_0.$$

如果 $\beta < \omega_0$,(3.4)式可写为

$$x = a e^{-\beta t} \cos(\omega t - \varphi). \tag{3.5}$$

式中

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad \varphi = \arctan\left(\frac{\dot{x}_0}{x_0 \omega} + \frac{\beta}{\omega}\right) \tag{3.6}$$

均为实常数,x_0 和 $\dot{x}_0$ 为物体的初位置和初速度. 方程(3.5)的曲线如图 7.5 所示,它可以看成带有指数衰减振幅的谐振动. 振幅衰减的速度由指数 β 决定,而振动的频率 ω 小于无阻尼时的自由振动的频率 ω_0. 存在阻尼时频率变小是由于阻尼阻碍运动造成的.

如果 $\beta > \omega_0$,这时 λ 的两个值都是实数,而且都是负数,(3.4)式可改写为

$$x = c_1 e^{-\left(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right)t} + c_2 e^{-\left(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right)t}. \tag{3.7}$$

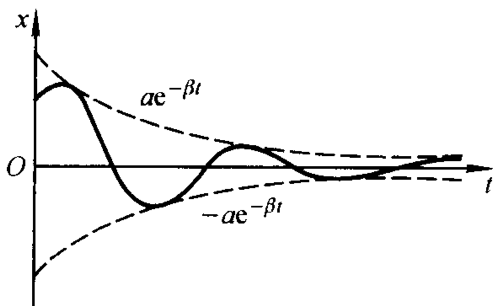


图 7.5



图 7.6

这时 x 是 t 的单调递减函数,当 $t \to \infty$ 时,x 趋向平衡位置,而没有振动,如图 7.6所示. 这种运动类型称为**非周期性衰减**.

最后,当 $\beta = \omega_0$ 时,特征方程只有一个重根,$\lambda = -\beta$,这时微分方程(3.3)的通解为

$$x = (c_1 + c_2 t) e^{-\beta t}. \tag{3.8}$$

这是非周期性衰减的特殊情况，它虽然不一定是单调递减的运动，但同样没有振动的性质.

现在讨论有阻力时的强迫振动. 在方程(3.3)中添加强迫力 $F\cos\omega_p t$ 得运动方程

$$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2 x=\frac{F}{m}\cos\omega_p t. \tag{3.9}$$

采用复数形式解这个方程比较方便，因此我们用 $e^{i\omega_p t}$ 来代替上式右边的 $\cos\omega_p t$：

$$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2 x=\frac{F}{m}e^{i\omega_p t}. \tag{3.10}$$

这个方程的通解就是对应的齐次方程的通解 x_1 和任意一个特解 x_2 的和. x_1 在前面的自由阻尼振动中已讨论过了. 现在只要再求一个特解 x_2 即可. 为此令

$$x_2=Be^{i\omega_p t}=be^{i(\omega_p t-\delta)}. \tag{3.11}$$

将(3.11)代入(3.10)，得

$$B=\frac{F}{m(\omega_0^2-\omega_p^2+2i\beta\omega_p)}, \tag{3.12}$$

或

$$\begin{cases} b=\dfrac{F}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega_p^2)^2+4\beta^2\omega_p^2}}, \\ \tan\delta=\dfrac{2\beta\omega_p}{\omega_0^2-\omega_p^2}. \end{cases} \tag{3.13}$$

为明确起见，我们讨论 $\omega_0>\beta$ 时的情形. 将(3.12)或(3.13)代入(3.11)，取其实部，最后得方程(3.9)的通解为

$$x=ae^{-\beta t}\cos(\omega t-\varphi)+b\cos(\omega_p t-\delta), \tag{3.14}$$

上式第一项随时间按指数规律递减，所以经过足够长的时间后，留下的只是第二项

$$x=b\cos(\omega_p t-\delta). \tag{3.15}$$

这是一个简谐运动，其频率即为强迫力的频率 ω_p，振幅 b 由(3.13)式决定. 当 $\omega_p\to\omega_0$ 时，振幅 b 虽然也要增加，但不会趋向无穷大. 令

$$\kappa=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega_0^2}\right)^2+\gamma^2\dfrac{\omega_p^2}{\omega_0^2}}}, \tag{3.16}$$

其中 $\gamma=\dfrac{2\beta}{\omega_0}$，则振幅 b 可表示为

$$b=\kappa\frac{F}{k}.$$

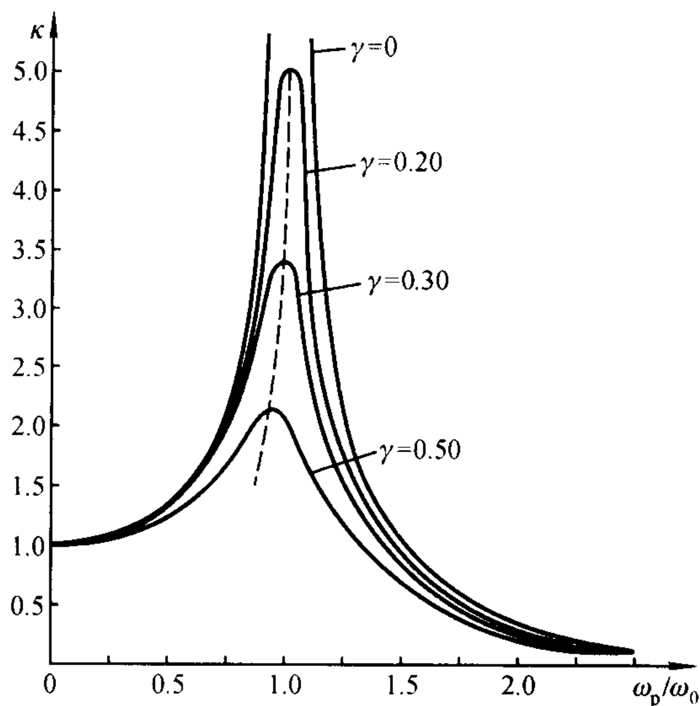


图 7.7

κ 称为**振幅的放大因子**. κ 随阻尼因子 γ 和频率比值$\frac{\omega_p}{\omega_0}$的变化如图 7.7 所示.

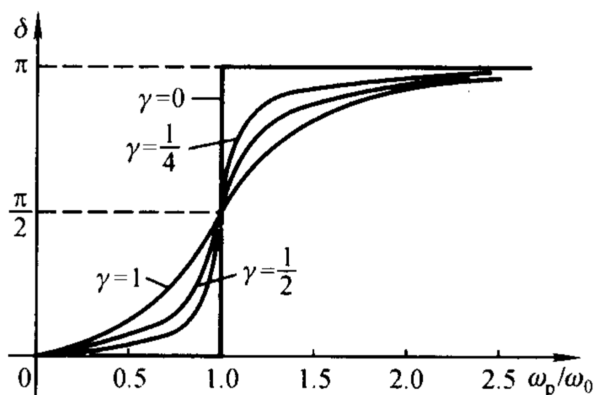


图 7.8

强迫振动有相位差. 图 7.8 是根据(3.13)式绘出的相位差 δ 随频率比值 $\frac{\omega_p}{\omega_0}$ 变化的曲线. 在外力的强迫作用下,体系振动的相位总是落后的. 从图中可以看出:在 $\omega_p \gg \omega_0$ 时,相位落后 π;在 $\omega_p \ll \omega_0$ 时,相位差接近于零;在 $\omega_p = \omega_0$ 时,相位恒落后$\frac{\pi}{2}$. 无阻尼时,当 ω_p 从大于 ω_0 趋近于 ω_0 时,相位落后 π;ω_p 从小于 ω_0 趋近 ω_0 时,相位差为零. 所以阻尼为零时,相位差在 $\omega_p = \omega_0$ 处有 $-\pi$ 跳变. 有阻尼时,这一跳变被抹平了,相位差从 0 到 $-\pi$ 是连续变化的.

*§7.4　耗散函数　多自由度体系的阻尼振动

体系作微振动时,速度是个小量.因此总可以假定作用在微振动体系上的阻力是速度的线性函数.例如作用在第 i 个质点上的阻力在 x 方向的分量可表示为

$$F_{ix} = -c\dot{x}_i, \tag{4.1}$$

式中 c 是比例系数.

对于多自由度体系的微振动问题,在第六章中我们是用拉格朗日方程来处理的.而以前所应用的拉格朗日方程,都没有包含阻力.如何把(4.1)这种形式的阻力纳入拉格朗日方程的理论框架中去呢?办法是引入一个耗散函数 G,在拉格朗日方程的左端添加一项$\partial G/\partial\dot{q}_\alpha$.

我们从最简单的情况开始.对于一个沿 x 方向运动的质点,定义耗散函数 G 为

$$G = \frac{1}{2}c\dot{x}^2. \tag{4.2}$$

没有阻力时质点的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} = Q,$$

式中 $-\partial V/\partial x$ 为作用在质点上的**保守力**,Q 为作用在质点上的非保守的**主动力**.质点所受的阻力可表示为

$$F_x = -\frac{\partial G}{\partial\dot{x}} = -c\dot{x}.$$

这表明在计入阻力后只要在原来的拉格朗日方程中加上一项$\partial G/\partial\dot{x}$ 即可.即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial\dot{x}} = Q. \tag{4.3}$$

若主动力都是保守力,则(4.3)可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial G}{\partial\dot{x}}. \tag{4.4}$$

在质点作一般运动的情况下,速度可分解为三个正交的分量,耗散函数可写为

$$G = \frac{1}{2}(c_1\dot{x}^2 + c_2\dot{y}^2 + c_3\dot{z}^2). \tag{4.5}$$

对于质点系来讲,对每一个质点都可以写出(4.5)式,把它们加起来即得整个质点系的耗散函数

$$G = \frac{1}{2}\sum_i (c_{1i}\dot{x}_i^2 + c_{2i}\dot{y}_i^2 + c_{3i}\dot{z}_i^2). \tag{4.6}$$

一般情况下质点系受到约束,坐标 x_i、y_i、z_i($i=1,2,\cdots$)不是互相独立的,这时只有将(4.6)式改为用广义坐标 $q_1,q_2,\cdots$ 及广义速度 $\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots$ 表示,才能纳入我们以前所用的拉格朗日方程的框架中去.坐标 x_i 和广义坐标 $q_1,q_2,\cdots$ 的关系由约束方程

$$x_i = x_i(q_1 q_2 \cdots q_s)$$

给出,因此

$$\dot{x}_i = \sum_\alpha \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha,$$

$$\dot{x}_i^2 = \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\frac{\partial x_i}{\partial q_\beta}\dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta,$$

类似地写出 $\dot{y}_i$ 和 $\dot{z}_i$ 的表示式,将它们代入(4.6)可得

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2}\sum_i \sum_{\alpha,\beta}\left[c_{1i}\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\frac{\partial x_i}{\partial q_\beta} + c_{2i}\frac{\partial y_i}{\partial q_\alpha}\frac{\partial y_i}{\partial q_\beta} + c_{3i}\frac{\partial z_i}{\partial q_\alpha}\frac{\partial z_i}{\partial q_\beta}\right]\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta, \end{aligned} \tag{4.7}$$

其中

$$c_{\alpha\beta} = \sum_i \left(c_{1i}\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\frac{\partial x_i}{\partial q_\beta} + c_{2i}\frac{\partial y_i}{\partial q_\alpha}\frac{\partial y_i}{\partial q_\beta} + c_{3i}\frac{\partial z_i}{\partial q_\alpha}\frac{\partial z_i}{\partial q_\beta}\right). \tag{4.8}$$

$c_{\alpha\beta}$一般是 $q_1,q_2,\cdots,q_s$ 的函数.但在微振动问题中,$q_1,q_2,\cdots$ 和 $\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots$ 都是小量,在 T 和 V 中我们都只保留到二级小量,因此 G 也只要保留到二级小量.所以(4.7)中的 $c_{\alpha\beta}$可看成常数.

耗散函数表示为(4.7)的形式后,计入阻力的质点系的拉格朗日方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial G}{\partial \dot{q}_\alpha} = Q_\alpha,\ \alpha = 1,2,\cdots,s \tag{4.9}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial G}{\partial \dot{q}_\alpha},\ \alpha = 1,2,\cdots,s. \tag{4.10}$$

耗散函数 G 具有能量变化率的量纲,它决定了力学体系能量的耗散率 $-\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$.证明如下:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_\alpha \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - L\right) \\ &= \sum_\alpha \dot{q}_\alpha\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\right), \end{aligned}$$

将(4.10)代入上式得

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\sum \dot{q}_\alpha \frac{\partial G}{\partial \dot{q}_\alpha}.$$

由(4.7)知 G 是 $\dot{q}_\alpha$ 的二次齐次式. 由齐次函数的欧拉定理可得

$$\sum_\alpha \dot{q}_\alpha \frac{\partial G}{\partial \dot{q}_\alpha} = 2G,$$

代入前式即得

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 2G. \tag{4.11}$$

所以单位时间内体系所耗散的能量等于两倍的耗散函数.

下面我们用(4.10)式来讨论两个自由度体系的微振动问题. 为简单起见, 设 q_1、q_2 已经是体系的两个简正坐标,因此

$$\begin{cases} T = \dfrac{1}{2}(a_{11}\dot{q}_1^2 + a_{22}\dot{q}_2^2), \\ V = \dfrac{1}{2}(b_{11}\dot{q}_1^2 + b_{22}\dot{q}_2^2), \\ G = \dfrac{1}{2}(c_{11}\dot{q}_1^2 + 2c_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + c_{22}\dot{q}_2^2). \end{cases} \tag{4.12}$$

将(4.12)代入(4.10)可得

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + b_{11}q_1 + c_{11}\dot{q}_1 + c_{12}\dot{q}_2 = 0, \\ a_{22}\ddot{q}_2 + b_{22}q_2 + c_{12}\dot{q}_1 + c_{22}\dot{q}_2 = 0. \end{cases} \tag{4.13}$$

这是个常系数线性齐次方程,设它的特解为

$$\begin{cases} q_1 = A_1 \mathrm{e}^{\lambda t}, \\ q_2 = A_2 \mathrm{e}^{\lambda t}. \end{cases} \tag{4.14}$$

代入(4.13)得

$$\begin{cases} A_1(a_{11}\lambda^2 + c_{11}\lambda + b_{11}) + A_2 c_{12}\lambda = 0, \\ A_1 c_{12}\lambda + A_2(a_{22}\lambda^2 + c_{22}\lambda + b_{22}) = 0. \end{cases} \tag{4.15}$$

方程(4.15)只有在其系数行列式为零时才有非零解,即要求

$$(a_{11}\lambda^2 + c_{11}\lambda + b_{11})(a_{22}\lambda^2 + c_{22}\lambda + b_{22}) - c_{12}^2\lambda^2 = 0. \tag{4.16}$$

这是一个关于 λ 的四次方程. 它有四个根:λ_1、λ_2、λ_3、λ_4. 如果阻尼不很大,即 c_{11}、c_{12}、c_{22}较小,则四个根都是带有负的实部的复根,即

$$\begin{cases} \lambda_1 = -n_1 + \mathrm{i}\omega_1, \quad \lambda_2 = -n_1 - \mathrm{i}\omega_1, \\ \lambda_3 = -n_2 + \mathrm{i}\omega_2, \quad \lambda_4 = -n_2 - \mathrm{i}\omega_2. \end{cases} \tag{4.17}$$

其中 n_1、n_2、ω_1、ω_2 都是正实数. 将(4.17)代入(4.15)可得出相应的比值 A_1/A_2,令它为 μ_1、μ_2、μ_3、μ_4,最后得方程(4.13)的通解为

$$\begin{cases} q_1 = A_1^{(1)}e^{\lambda_1 t} + A_1^{(2)}e^{\lambda_2 t} + A_1^{(3)}e^{\lambda_3 t} + A_1^{(4)}e^{\lambda_4 t}, \\ q_2 = \mu_1 A_1^{(1)}e^{\lambda_1 t} + \mu_2 A_1^{(2)}e^{\lambda_2 t} + \mu_3 A_1^{(3)}e^{\lambda_3 t} + \mu_4 A_1^{(4)}e^{\lambda_4 t}. \end{cases} \tag{4.18}$$

其中 $A_1^{(1)}$、$A_1^{(2)}$、$A_1^{(3)}$、$A_1^{(4)}$ 四个常数由初始条件决定. 为了看出其振动性质,可将(4.18)化为三角函数形式. 经过简单的变换可得

$$\begin{aligned} q_1 &= e^{-n_1 t}(A_1\cos\omega_1 t + A_2\sin\omega_1 t) + \\ &\quad e^{-n_2 t}(A_3\cos\omega_2 t + A_4\sin\omega_2 t), \\ q_2 &= e^{-n_1 t}(B_1\cos\omega_1 t + B_2\sin\omega_1 t) + \\ &\quad e^{-n_2 t}(B_3\cos\omega_2 t + B_4\sin\omega_2 t). \end{aligned} \tag{4.19}$$

其中 8 个常数 A_1、A_2、A_3、A_4 和 B_1、B_2、B_3、B_4 全部可用 $A_1^{(1)}$、$A_1^{(2)}$、$A_1^{(3)}$ 和 $A_1^{(4)}$ 表示.

如果阻尼很大,则方程(4.16)可能有 2 个甚至 4 个都是负的实数. 这时体系不是周期性的运动,和一个自由度时的情形类似.

下面讨论有阻尼时的强迫振动. 为了便于比较,我们以§6.8 中两个耦合振子的强迫振动为例. 设在 m_1 和 m_2 之间加一个阻尼器,如图 7.9 所示. 假定 m_1 受到一个水平的干扰力 $F_0\cos\omega_p t$,阻尼器所产生的阻力和两个质量的相对速度成正比,即 m_1 受到的阻力为 $c(\dot{x}_2-\dot{x}_1)$,m_2 受到的阻力为 $-c(\dot{x}_2-\dot{x}_1)$. 由此可得体系的耗散函数为

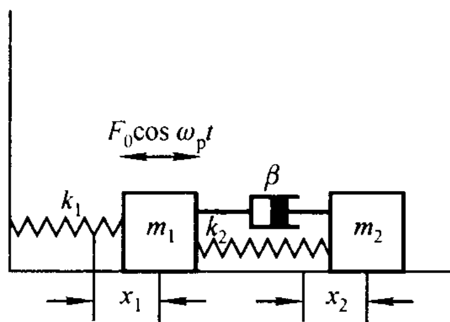


图 7.9

$$G = \frac{1}{2}c(\dot{x}_1^2 - 2\dot{x}_1\dot{x}_2 + \dot{x}_2^2). \tag{4.20}$$

体系的动能和势能

$$T = \frac{1}{2}(m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2),$$

$$V = \frac{1}{2}[k_1 x_1^2 + k_2(x_2 - x_1)^2].$$

将它们代入(4.10)得体系的运动方程为

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2(x_2 - x_1) = c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + F_0\cos\omega_p t, \\ m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) = c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2). \end{cases} \tag{4.21}$$

这个方程的解由两部分组成,一部分是对应的齐次方程的通解,它具有(4.19)的形式,由于它的振幅按 e^{-nt} 衰减,稳定时这个解就不起作用了. 另一部分是非齐次方程的一个特解,可令它为

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos\omega_p t + A_2\sin\omega_p t, \\ x_2 = A_3\cos\omega_p t + A_4\sin\omega_p t. \end{cases} \tag{4.22}$$

将它代入(4.21),并令其中 $\cos\omega_p t$ 及 $\sin\omega_p t$ 前的各个系数为零,即可得出四个代数方程,用于解 A_1、A_2、A_3、A_4 四个常数. 解出后代入(4.22)即得体系的强迫振动规律.

实用上最感兴趣的是使 m_1 的振动削弱以至消失的装置,这种装置称为**消振器**(由图 7.9 中的 m_2、k_2、β 三部分组成). 为了说明阻尼对消振器的作用. 可考察 m_1 的振幅随耗散系数 c 变化的关系. 根据(4.22)式,m_1 的振幅由下列方程

$$A^2 = (x_1)^2_{\max} = A_1^2 + A_2^2$$

决定. 下面我们略去中间演算过程,而直接写出最后结果:

$$\frac{A^2}{x_{st}^2} = \frac{4c'^2\omega'^2_p + (\omega'^2_p - \omega'^2_a)^2}{4c'^2\omega'^2_p(\omega'^2_p - 1 + \mu\omega'^2_p)^2 + [\mu\omega'^2_a\omega'^2_p - (\omega'^2_p - 1)(\omega'^2_p - \omega'^2_a)]^2},$$

其中 $x_{st} = \frac{F_0}{k_1}$是质量 m_1 在静力 F_0 作用下的静位移,$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$是主质量 m_1 的固有振动主频率,$\omega'_p = \frac{\omega_p}{\omega_0}$是干扰力频率与主频率之比,$\omega_a = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$是消振器的固有频率,$\omega'_a = \frac{\omega_a}{\omega_0}$是消振器固有频率和主质量主频率之比,$\mu = \frac{m_2}{m_1}$是消振器质量与主质量之比,$c' = \frac{c}{2m_2\omega_0}$是无量纲阻尼因子.

图 7.10表示了 $\omega'_a = 1$,$\mu = 1/20$的体系对于不同阻尼值时其主质量的振幅

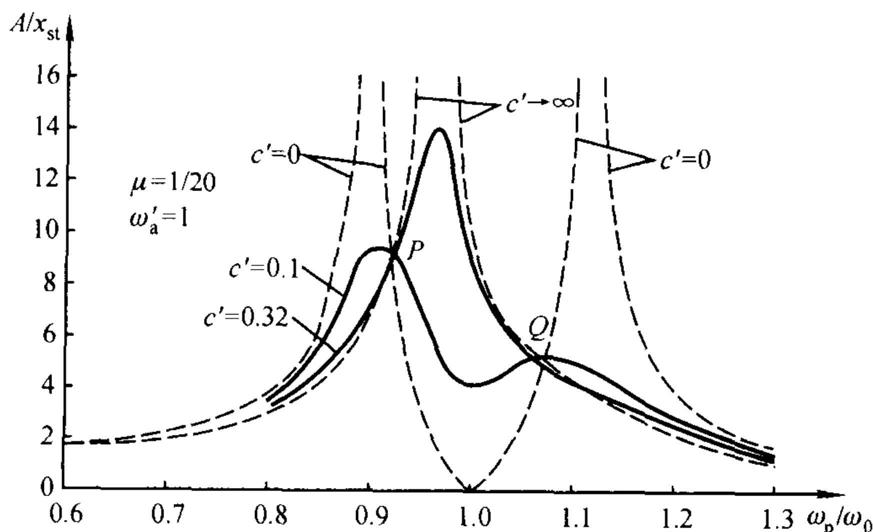


图 7.10

A/x_{st}与频率比 $\omega_p' = \omega_p/\omega_0$ 的关系. 图中的一条虚线表示阻尼为零,即 $c'=0$ 的情形,这是§6.8 中已经讨论过的情况. 另一条虚线表示阻尼为∞,即 $c'\to\infty$ 的情形,这时质量 m_1 和 m_2 将刚性地连接在一起而成为一个自由度的体系. 其余两条实线分别为 $c'=0.10$ 和 $c'=0.32$ 时的振幅-频率特性曲线. 从图中可以看到,在两个共振区之间,阻尼对强迫振动的振幅有显著的作用,而在这区域以外,阻尼的影响是很小的. 从图中还可以看出不论 c'为何值,所有振幅-频率特性曲线都通过 P、Q 两点,这两点是 $c'=0$ 和 $c'\to\infty$的特性曲线的交点.

**§7.5 非线性振动对共振的影响

共振是工程技术上的一个极其重要的问题. 实际的共振问题必须计入阻尼. 上面两节只考虑了线性振动. 研究表明,如果考虑非线性振动的效应,那么阻尼共振会出现新的特性,即所谓振幅"破裂"现象. 本节对这一性质作一简单讨论.

将§6.9 中的方程(9.10)和本章的方程(3.9)结合起来,即可得考虑非线性效应后的一维阻尼强迫振动方程:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m}\cos\omega_p t - px^2 - sx^3, \tag{5.1}$$

(上式中的 p、s 就是§6.9 中的 α、β)因为共振总是和阻尼伴生,因此我们只需讨论 $\beta<\omega_0$ 的情况.

在线性振动中,强迫振动的振幅 b 对外力的振幅 F 和频率 ω_p 的依赖关系由(3.13)式给出. 在共振区域,ω_p 和 ω_0 的值接近,因此若令

$$\omega_p = \omega_0 + \varepsilon, \tag{5.2}$$

则 ε 一定是小量. 将(5.2)代入(3.13),考虑到 ε 是小量,可得

$$b^2(\varepsilon^2 + \beta^2) = \frac{F^2}{4m^2\omega_0^2}. \tag{5.3}$$

根据§6.9 的讨论,考虑了非线性振动的修正后,振动的基本频率的修正值和振幅的平方成正比. 因此方程(5.1)的固有振动的基本频率 ω 可表示为

$$\omega = \omega_0 + \kappa b^2, \tag{5.4}$$

其中

$$\kappa = \frac{3s}{8\omega_0} - \frac{5p^2}{12\omega_0^3}.$$

[见§6.9 公式(9.18)]. 这样,在考虑了非线性振动的修正后,强迫力的频率 ω_p 和固有振动的基本频率 ω 的差应为

$$\varepsilon' = \omega_p - \omega = \varepsilon - \kappa b^2,$$

式中 $\varepsilon = \omega_p - \omega_0$ 仍按(5.2)式的规定不变. 将 ε'代替(5.3)中的 ε 后,我们就得到强迫振动的振幅 b 随强迫力的振幅 F 和频率 ω_p(通过 $\varepsilon = \omega_p - \omega_0$ 表示)变化的关系式:

$$b^2[(\varepsilon - \kappa b^2)^2 + \beta^2] = \frac{F^2}{4m^2\omega_0^2}. \tag{5.5}$$

这是一个关于 b^2 的三次代数方程,它的实根决定了强迫振动的振幅. 以 F 为参数,作 $b(\varepsilon)$ 曲线,即可看出 b 随 ω_p 和 F 变化的特性.

当 F 很小时,b 也一定很小,略去(5.5)式中高于 b^2 的项,(5.5)式回到(5.3)式,其图形在 $\varepsilon=0$ 处为极大值,并且关于 $\varepsilon=0$ 是对称的,如图 7.11(a)所示. 随着 F 的增加,曲线发生形变. 开始阶段,曲线仍有一个极大值,但极大值向正 ε 一边(当 $\kappa>0$ 时)移动,如图 7.11(b)所示. 这两种情况下方程(5.5)只有一个实根,振幅 b 是唯一确定的.

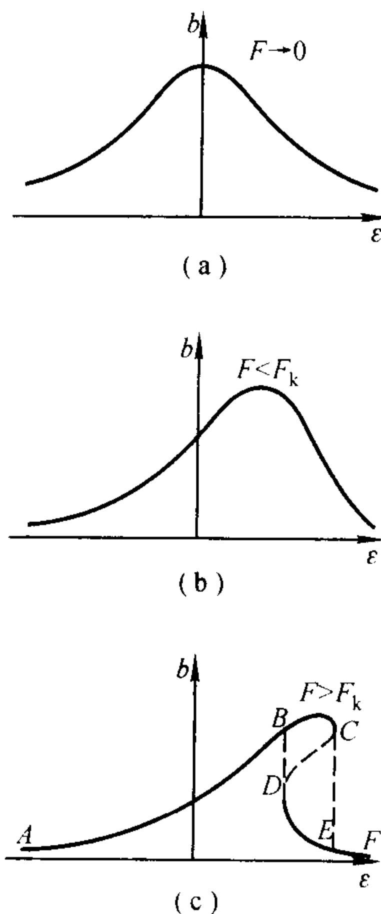


图 7.11

但是从某一个值 $F=F_k$ 以后,情况发生了质的变化. 如图 7.11(c)所示,这时有一个确定的频率区域存在,在这个区域里,方程(5.5)有三个实根. 这个区域的边界由图中的 C 点和 D 点的位置决定. 在这两个点上,$\frac{db}{d\varepsilon}\to\infty$. 将(5.5)式对 ε 微商得

$$\frac{db}{d\varepsilon} = \frac{-\varepsilon b + \kappa b^3}{\varepsilon^2 - 4\kappa\varepsilon b^2 + 3\kappa^2 b^4 + \beta^2}. \tag{5.6}$$

所以 C 点和 D 点的位置由方程

$$\varepsilon^2 - 4\kappa\varepsilon b^2 + 3\kappa^2 b^4 + \beta^2 = 0 \tag{5.7}$$

决定. 将(5.7)和(5.5)联立,消去 b,即可求得对应于 C 点和 D 点的两个 ε 的值 ε_1 和 ε_2. 在这个区间内,振幅 b 有三个实根.

不难看出,在这三种情况下,振幅的极大值 b_{max} 是相同的. b_{max} 出现在 $\frac{db}{d\varepsilon}=0$ 处. 由(5.6)式知这时的 $\varepsilon=\kappa b^2$,将它代入(5.5)式即得

$$b_{max} = \frac{F}{2m\omega_0\beta}. \tag{5.8}$$

这和不考虑非线性振动效应时由(5.3)式所得出的结论吻合.

在 b 存在三个实根的区域中,实际振动时不可能三个根同时出现. 根据运动稳定性的理论可以证明,三个根中的中间一个根[即图 7.11(c)中虚线所表示的 CD 段]所对应的振动是不稳定的:体系处在这种状态时,会使振动立即变为大一些的或小一些的根(即线段 BC 或 DE)的振动.(回忆 §4.11 讨论刚性转动稳定性时,我们曾证明当 $I_1>I_2>I_3$ 时,对应于 I_2 的转动是不稳定的. 这里的情况有些类似,但证明比较冗长,故不作讨论.)因此可见,在图 7.11(c)的情形中,只有 ABC 和 DEF 两个分枝才对应体系的真实振动. 允许存在两种不同振幅的频率区域是这种振动的一个特点. 当外力的频率逐渐增加时,强迫振动的振幅将沿着曲线 ABC 增加. 到达 C 点时,振幅发生"破裂",跃变到 E 点,然后随着频率的继续增加,沿曲线 EF 改变. 如外力的频率从大逐渐减少到小,那么强迫振动的振幅沿曲线 FED 变化,在 D

点振幅“破裂”跃变到 B 点，然后沿 BA 减少.

最后我们来计算会发生振幅“破裂”这一现象的 F 的临界值 F_k. 从图 7.11 中可以看到，F_k 是当 C 点和 D 点重合时的 F 值. 而 C 点和 D 点所对应的 ϵ 值是由方程(5.7)的根决定的，要使 C 点和 D 点重合，需使方程(5.7)有重根. 这个条件就是方程(5.7)的判别式为零，即 $\kappa^2 b^4=\beta^2$，这时 $\epsilon=2\kappa b^2$. 将它们代入(5.5)式即得

$$F_k^2=\frac{8m^2\omega_0^2\beta^3}{|\kappa|}. \tag{5.9}$$

* *§7.6 RLC 电路的拉格朗日方程

易于从力学体系推广应用于非力学体系，是拉格朗日方程的优点之一. 本节讨论如何把拉格朗日方程用于 RLC 电路的问题，可以看到，它和线性阻尼振动的情况完全相似.

图 7.12 是一个最简单的 RLC 电路，它由电感 L、电阻 R、电容 C 和电源 E 串联而成. 令 e 表示电荷，$i=\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$ 表示电流，u 表示电路中各元件两端的电位差，则

$$u_L=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t},\quad u_R=Ri,\quad u_C=\frac{e}{C}=\frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t. \tag{6.1}$$

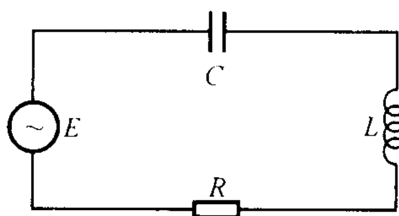


图 7.12

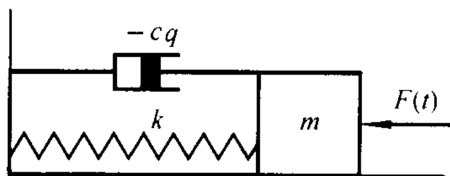


图 7.13

由欧姆定律得

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri+\frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t=E(t),$$

或

$$L\frac{\mathrm{d}^2e}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}+\frac{e}{C}=E(t). \tag{6.2}$$

现在我们再来看如图 7.13 所示的力学体系：质量为 m 的质点在弹性力 $-kq$、阻力 $-c\dot{q}$ 和强迫力 $F(t)$ 作用下运动. 此力学体系的动能 T、势能 V、耗散函数 G 和广义力 Q 分别为

$$T=\frac{1}{2}m\dot{q}^2,\quad V=\frac{1}{2}kq^2,\quad G=\frac{1}{2}c\dot{q}^2,\quad Q=F(t).$$

将它们代入前节给出的考虑了阻尼后的拉格朗日方程(4.9)，得

$$m\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}+c\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+kq=F(t). \tag{6.3}$$

比较方程(6.2)和(6.3)，可以看到两者的数学结构是完全相同的，RLC 电路(线性电路)中的

各个电学量和一个作线性振动的力学体系的各个力学量之间,有一一对应的关系:电荷 e 和广义坐标 q 相当,电感 L 和质量 m 相当,电阻 R 和阻尼系数 c 相当,电容的倒数 $1/C$ 和劲度系数 k 相当,电源的电动势 E 和广义力 Q 相当.

以上讨论的是单个自由度的情况,不难推广到多个自由度的情况. 因为动能、势能和耗散函数都具有可加性,因此对任意的 RLC 电路来说,如果我们取

$$\begin{cases} \text{广义坐标 } q_\alpha = \text{电荷 } e_\alpha, \\ \text{广义速度 } \dot{q}_\alpha = \text{电流 } i_\alpha = \dfrac{\mathrm{d}e_\alpha}{\mathrm{d}t}, \\ \text{动能 } T = \dfrac{1}{2}\sum\limits_\alpha L_\alpha i_\alpha^2 + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{\substack{\alpha,\beta \\ \alpha\neq\beta}} M_{\alpha\beta} i_\alpha i_\beta, \\ \text{势能 } V = \dfrac{1}{2}\sum\limits_\alpha \dfrac{1}{C_\alpha} e_\alpha^2, \\ \text{耗散函数 } G = \dfrac{1}{2}\sum\limits_\alpha R_\alpha i_\alpha^2, \\ \text{广义力 } Q = \text{电动势 } E_\alpha, \end{cases} \tag{6.4}$$

其中 E_α 是电流 i_α 所流经的电源的电动势,$M_{\alpha\beta}$是电流 i_α 和 i_β 的互感,所有的 i_α 是互相独立的,将它们代入拉格朗日方程(4.9),即可得任意 RLC 电路所满足的微分方程.

【例 1】 写出图 7.14 所示电路的微分方程.

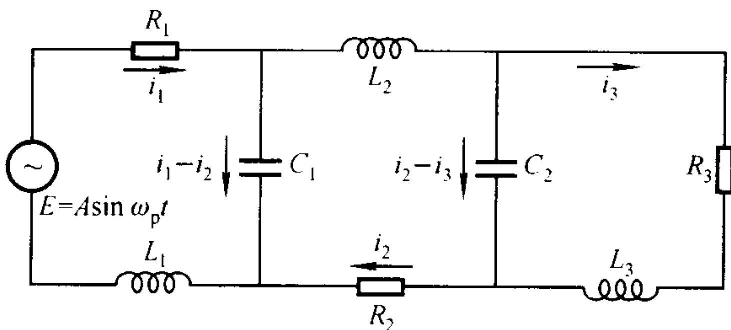


图 7.14

解:这个电路有三个独立的电流,取流经 R_1、R_2、R_3 的电流为 i_1、i_2、i_3,则流经 C_1 的电流为 i_1-i_2,流经 C_2 的电流为 i_2-i_3. 因此由(6.4)得此电路所对应的 T、V、G 和Q_α 为:

$$T = \frac{1}{2}L_1\dot{e}_1^2 + \frac{1}{2}L_2\dot{e}_2^2 + \frac{1}{2}L_3\dot{e}_3^2,$$

$$V = \frac{1}{2C_1}(e_1-e_2)^2 + \frac{1}{2C_2}(e_2-e_3)^2,$$

$$G = \frac{1}{2}(R_1\dot{e}_1^2 + R_2\dot{e}_2^2 + R_3\dot{e}_3^2),$$

$$Q_1 = A\sin\omega_\mathrm{p}t,\quad Q_2 = 0,\quad Q_3 = 0.$$

将它们代入方程(4.9)得

$$L_1\ddot{e}_1 + R_1\dot{e}_1 + \frac{1}{C_1}(e_1-e_2) = A\sin\omega_\mathrm{p}t,$$

$$L_2\ddot{e}_2+R_2\dot{e}_2-\frac{1}{C_1}e_1+\frac{C_1+C_2}{C_1C_2}e_2-\frac{1}{C_2}e_3=0,$$

$$L_3\ddot{e}_3+R_3\dot{e}_3-\frac{1}{C_2}(e_2-e_3)=0.$$

这就是图 7.14 所示的 *RLC* 电路的拉格朗日方程,它和用常规方法得出来的方程完全一样.

【例 2】 写出图 7.15 所示的耦合电路的拉格朗日方程.

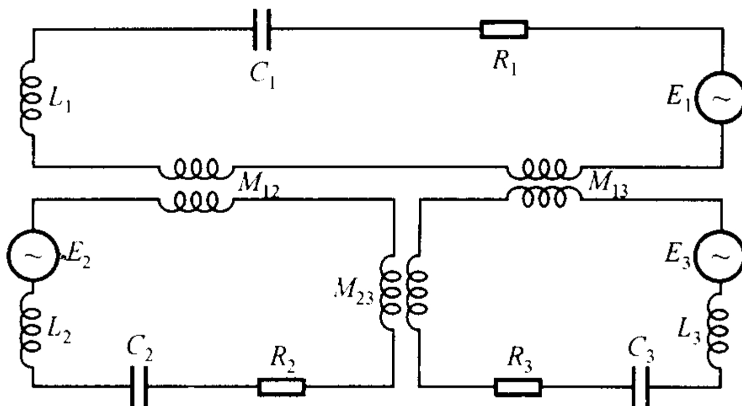


图 7.15

解: 这个耦合电路由三个回路组成,它们的电流各自独立. 因此由(6.4)得

$$T=\frac{1}{2}L_1\dot{e}_1^2+\frac{1}{2}L_2\dot{e}_2^2+\frac{1}{2}L_3\dot{e}_3^2+M_{12}\dot{e}_1\dot{e}_2+M_{23}\dot{e}_2\dot{e}_3+M_{31}\dot{e}_3\dot{e}_1,$$

$$V=\frac{1}{2C_1}e_1^2+\frac{1}{2C_2}e_2^2+\frac{1}{2C_3}e_3^2,$$

$$G=\frac{1}{2}R_1\dot{e}_1^2+\frac{1}{2}R_2\dot{e}_2^2+\frac{1}{2}R_3\dot{e}_3^2,$$

$$Q_1=E_1,\quad Q_2=E_2,\quad Q_3=E_3.$$

将它们代入方程(4.9)得

$$\begin{cases}L_1\ddot{e}_1+M_{12}\ddot{e}_2+M_{13}\ddot{e}_3+R_1\dot{e}_1+\dfrac{1}{C_1}e_1=E_1,\\[2mm] M_{12}\ddot{e}_1+L_2\ddot{e}_2+M_{23}\ddot{e}_3+R_2\dot{e}_2+\dfrac{1}{C_1}e_2=E_2,\\[2mm] M_{13}\ddot{e}_1+M_{23}\ddot{e}_2+L_3\ddot{e}_3+R_3\dot{e}_3+\dfrac{1}{C_3}e_3=E_3.\end{cases}$$

或者,对 t 求导得

$$L_\alpha\frac{\mathrm{d}^2i_\alpha}{\mathrm{d}t^2}+\sum_{\substack{\beta\\ \beta\neq\alpha}}M_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}^2i_\beta}{\mathrm{d}t^2}+R_\alpha\frac{\mathrm{d}i_\alpha}{\mathrm{d}t}+\frac{i_\alpha}{C_\alpha}=\frac{\mathrm{d}E_\alpha}{\mathrm{d}t},\ \alpha=1,2,3.$$

这就是图 7.15 所示电路的拉格朗日方程.

**§7.7 阻尼介质中的抛射体运动

抛射体是一类常见而又十分重要的运动，在中学物理和大学普通物理课程中都曾讨论过这个问题. 但以前的讨论均不考虑阻力，并且仅限于质点. 本节将讨论有阻尼时的情况.

对于抛射体运动，我们最感兴趣的是它的轨道. 众所周知，无阻尼时抛射体的轨道是一条抛物线，存在阻尼时，轨道当然不再是抛物线. 许多人认为它必将是一条如图7.16所示的近似于抛物线的曲线，这只有把抛射体看成质点时才正确. 对于几何形状比较复杂的抛射体，在一定的初始条件下，其质心运动轨道可和图7.16中的曲线相差极大. 下面我们以一简单实例对此作出理论说明.

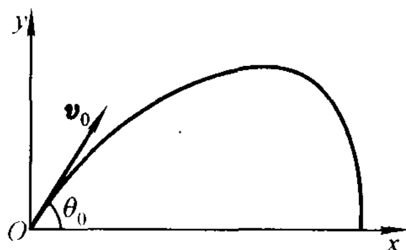


图 7.16

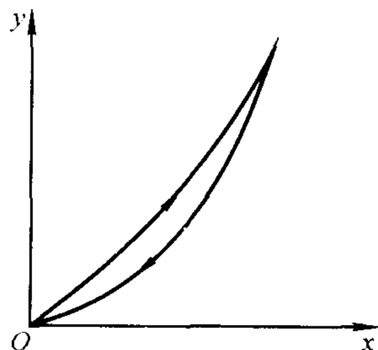


图 7.17

我们常可看到一些玩塑料飞碟的人，他们将飞碟凹面向下再强烈旋转后，以约45°的出射角抛出去，飞碟近似沿直线上升，到达最高点后下落时并不继续向前飞，也不是垂直下落，而是沿着几乎原来的路径回到出发点，玩碟者可在原地用手接住，如图7.17所示. 这种轨道当然不能再看成是一种近似的抛物线. 下面我们从理论上对这种运动作一分析.

如图7.18(a)所示，飞碟在到达最高点以前的飞行过程中，除了重力 P 和阻力 F' 外，还受到一个垂直于底面的升力 F. 这是由于空气有粘滞性，飞碟运动时会把靠近飞碟表面的一层空气带动使之跟随飞碟运动. 但由于几何形状的不对称，内外两侧的空气被带动的情况不一样，内侧(凹进一面)的空气比外侧更容易被带动，使内侧空气的绝对速度大，相对于飞碟的速度小；外侧的绝对速度小，相对速度大. 根据流体力学的伯努利定律，流体流动快的地方压力小，慢的地方压力大. 因而飞碟底部两侧所受的压力不一样，外侧小，内侧大，这就是升力 F 的来源.

下面来分析飞碟在 P、F'、F 三个力作用下的运动轨道. 可以认为这三个力都是通过质心的，对质心的力矩为零，因此角动量守恒，飞碟转动的方向将保持稳定，从而 F 的方向也保持不变. 将 P 分解为垂直飞碟底面和平行飞碟底面的两部分，在适当的初始条件下，垂直部分 $P_{\perp}$ 可和 F 抵消，平行部分 $P_{/\!/}$ 和 F' 的方向一致. 所以飞碟所受的合力恒和飞碟前进的方向相反，飞碟只能沿出射方向作直线运动，但前进的速度越来越小，最终使质心的速度为零，飞碟到达最高点. 这就是飞碟上升阶段近似作直线运动的定性分析.

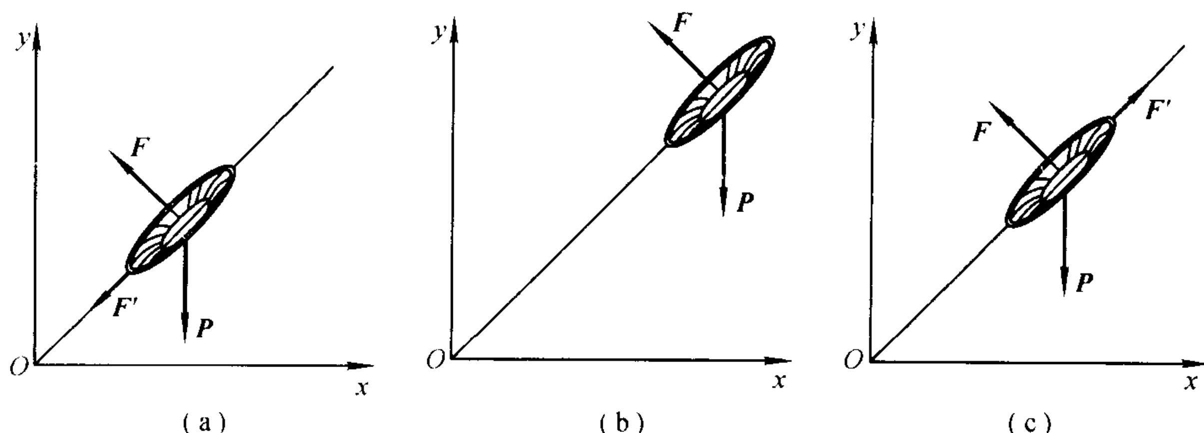


图 7.18

飞碟到达最高点时,阻力 F' 将消失,但升力 F 并不消失. 因为飞碟到最高点时,尽管整体前进速度为零,但旋转速度变化不大,受力情况如图 7.18(b)所示. 因而 F 仍和 $P_{\perp}$ 抵消,飞碟将在 $P_{/\!/}$ 的作用下,沿原来的路线往回飞. 在往回飞的过程中,阻力 F' 又出现,但方向和原来相反,如图 7.18(c)所示. 它的出现只影响飞碟的飞行速度,不影响飞行方向,因而飞碟最终仍飞回到出发点,这就是玩碟者可在原地接住飞碟的道理.

上面的粗糙分析表明:对于复杂几何形状的抛射体,在一定的初始条件下,其质心运动的轨道可和无阻尼运动时的抛物线轨道相差甚大.

下面再来具体求解可视作质点的抛射体在阻尼介质中的运动方程. 首先要考虑的问题是阻力和速度的关系,从解题的角度来说取速度一次律的阻力形式最方便,但它没有什么实际意义. 用阻力的普遍表示式 $F=-cf(v)$ 虽然适用性广,但当 $f(v)$ 的具体形式不给定时,仍然得不到具体结果. 因此比较有实际意义而又不太复杂的阻力形式是速度二次律,即 $F=-cv^2$. 另一个要考虑的问题是采用什么坐标? 无阻尼的情况或阻力是速度一次律的情况,水平方向和垂直方向的运动是互相独立的,用直角坐标求解很方便. 阻力和速度平方成正比时,水平方向和垂直方向的运动互相牵连. 考虑到阻力恒在轨道的切线方向,因此采用质点运动的本性方程就比较方便,即取抛射体的运动方程为

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-cv^2-mg\sin\theta, \\ m\dfrac{v^2}{\rho}=mg\cos\theta \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\beta v^2-g\sin\theta, \\ \dfrac{v^2}{\rho}=g\cos\theta, \end{cases} \tag{7.1}$$

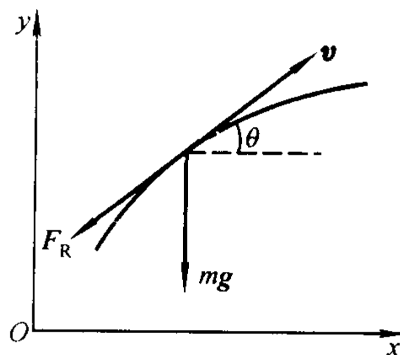


图 7.19

式中 θ 为轨道的切线和水平线的夹角,ρ 是轨道的曲率半径,如图 7.19 所示.

为了下面讨论的方便,我们先把(7.1)中的第二个方程表示为别的形式. 根据定义,平面轨道的曲率可表示为

$$\frac{1}{\rho}=-\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s},$$

式中 s 为轨道弧长. 将上式代入(7.1)中的第二个方程得

$$v^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}=-g\cos\theta. \tag{7.2}$$

由于 $v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$,(7.2)式又可改写为

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-\frac{g\cos\theta}{v}. \tag{7.3}$$

另外,利用直角坐标中曲率的表示式

$$\frac{1}{\rho}=-\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big/\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}=-\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\cos^3\theta,$$

(7.1)中的第二个方程也可表示为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{g}{v^2\cos^2\theta}. \tag{7.4}$$

(7.2)、(7.3)、(7.4)都是(7.1)中第二个方程的不同表示形式,在下面的讨论中都要用到.

用 $\mathrm{d}\theta$ 乘(7.1)中的第一个方程,并利用(7.3)式得

$$g\mathrm{d}(v\cos\theta)=\beta v^3\mathrm{d}\theta. \tag{7.5}$$

它是函数 $v=v(\theta)$所满足的微分方程,可以确定抛射体的速率 v 和仰角 θ 的关系. 这个方程可以直接积分. 为此先把它改写为

$$\frac{\mathrm{d}(v\cos\theta)}{(v\cos\theta)^3}=\frac{\beta}{g}\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^3\theta}.$$

利用初始条件 $v|_{\theta=\theta_0}=v_0$,积分得

$$-\frac{1}{v^2\cos^2\theta}+\frac{1}{v_0^2\cos^2\theta_0}=\frac{2\beta}{g}[F(\theta)-F(\theta_0)], \tag{7.6}$$

式中

$$F(\theta)=\int_0^\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^3\theta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}+\ln\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right). \tag{7.7}$$

由(7.6)和(7.7)即可求得方程(7.5)的解

$$v=v(\theta). \tag{7.8}$$

函数 $v=v(\theta)$是速度空间中速度矢量$\boldsymbol{v}$ 的极坐标表示式,如图 7.20 所示. 曲线具有初始条件

$$\theta=\theta_0,\quad v=v_0,$$

及渐近行为

$$\theta=-\frac{\pi}{2},\quad \dot{x}=0,\quad v=\dot{y}=v_\infty,$$

式中

$$v_\infty=\sqrt{\frac{mg}{\beta}},$$

是极限速度.

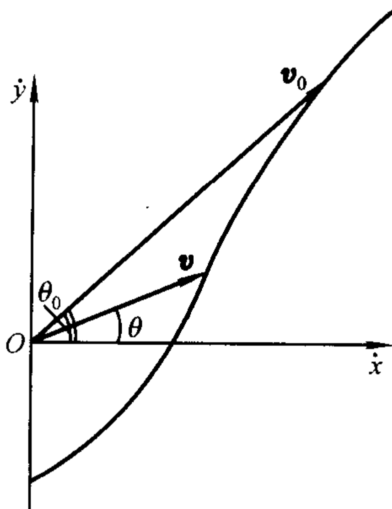


图 7.20

将(7.8)代入(7.2)和(7.3)得

$$ds = -\frac{v^2(\theta)d\theta}{g\cos\theta}, \tag{7.9}$$

$$dt = -\frac{v(\theta)d\theta}{g\cos\theta}, \tag{7.10}$$

进而可得

$$dx = ds\cos\theta = -\frac{v^2(\theta)}{g}d\theta, \tag{7.11}$$

$$dy = dx\tan\theta = -\frac{v^2(\theta)}{g}\tan\theta d\theta. \tag{7.12}$$

(7.9)~(7.12)均可直接积分,求出这些积分后即可求得抛射体的运动规律 $\theta=\theta(t)$、$s=s(t)$、$x=x(t)$、$y=y(t)$以及轨道方程 $y=f(x)$.

按照上述步骤虽然原则上已彻底求得了方程(7.2)的解,但(7.9)~(7.12)这几个积分都很复杂,实际使用时很不方便. 下面我们采用近似的方法,得出一些简洁而又实用的结论.

取 $\dot{x}=v\cos\theta$ 为新的变量,方程(7.5)可改写为

$$\frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = \frac{\beta}{g}\frac{v^2 d\theta}{\cos\theta}.$$

再将(7.2)代入上式得

$$\frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -\beta ds.$$

此式可方便的积分. 利用初条件 $\dot{x}|_{s=0}=v_0\cos\theta_0$ 得

$$\dot{x} = v_0\cos\theta_0 e^{-\beta s}.$$

对于步枪子弹等类抛射体,轨道接近水平线,可作近似 $s\approx x$,于是得

$$\dot{x} \approx v_0\cos\theta_0 e^{-\beta x}. \tag{7.13}$$

利用初始条件 $x|_{t=0}=0$,对(7.13)式积分得

$$x = \frac{1}{\beta}\ln[1+(v_0\beta\cos\theta_0)t]. \tag{7.14}$$

上式就是射程随时间的变化规律. 下面求轨道方程,将(7.13)代入(7.4)得

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{g}{\dot{x}^2} = -\frac{g}{v_0^2\cos^2\theta_0}e^{2\beta x}. \tag{7.15}$$

利用初始条件$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\tan\theta_0$,积分得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g}{2\beta v_0^2\cos^2\theta_0}(1-e^{2\beta x})+\tan\theta_0.$$

利用初始条件 $y|_{x=0}=0$,再次积分得

$$y = \frac{g}{4\beta^2 v_0\cos^2\theta_0}(1-e^{2\beta x})+\left(\tan\theta_0+\frac{g}{2\beta v_0^2\cos^2\theta_0}\right)x. \tag{7.16}$$

这就是轨道曲线的近似方程. 为了和无阻尼时的轨道方程作比较,令

$$\xi = 2\beta x,$$

则(7.16)可改写为

$$y = x\tan\theta_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta_0}p(\xi), \tag{7.17}$$

其中

$$p(\xi)=2\frac{e^{\xi}-\xi-1}{\xi^2}=1+\frac{\xi}{3}+\frac{\xi^2}{4\times 3}+\cdots \tag{7.18}$$

当 $p(\xi)=1$ 时就是无阻尼的抛物线轨道．所以阻力为速度二次律的弹道方程是一条经过修正的抛物线，两者的差别由(7.18)所规定的因子 $p(\xi)$决定．

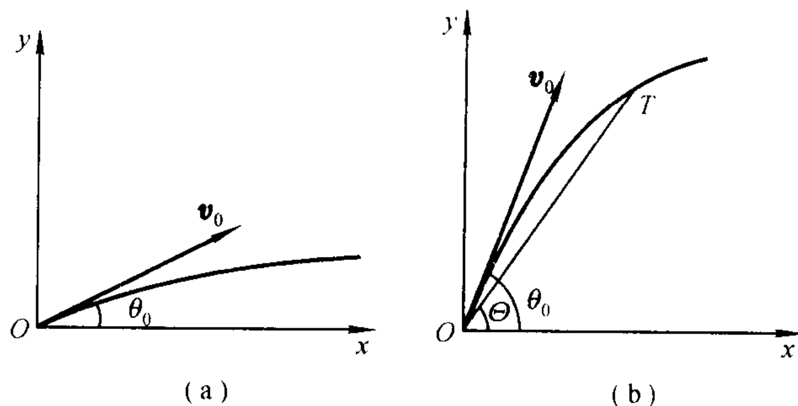


图 7.21

轨道方程(7.17)是在轨道接近水平线的条件下求得的．这种轨道如图 7.21(a)所示．对于如图 7.21(b)所示的轨道，如果所考察的一段轨道$\overset{\frown}{OT}$和直线 OT 相距不远，则只要令

$$\xi=2\beta\frac{x}{\cos\Theta}, \tag{7.19}$$

式中 Θ 为 OT 和水平线的夹角，则(7.17)和(7.18)仍然成立．类似地，对于射程方程(7.14)，只要把射程 x 理解为距离 OT，并把 θ_0 换成 $\theta_0-\Theta$，则(7.14)亦仍然成立，即

$$OT=\frac{1}{\beta}\ln[1+v_0\cos(\theta_0-\Theta)\beta t]. \tag{7.20}$$

如果没有重力，抛射体将沿出射方向作直线运动，

$$h=x\tan\theta_0-y$$

是水平距离为 x 处抛射体下落的距离．这是一个有重要实用价值的参数，由(7.17)式得

$$h=\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta_0}p(\xi), \tag{7.21}$$

这个表示式对图 7.21(a)和(b)两种情况都正确．

习　题

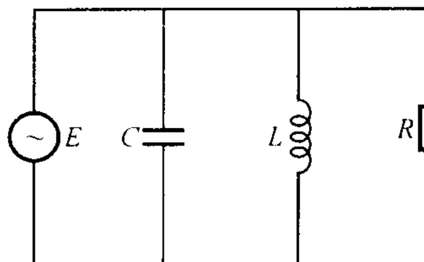
7.1 将船缆在泊船的系柱上绕两三圈，只要有人轻轻拉住船缆的一端，就能系住一只大船．试证人拉船缆的力 F_0 和船缆拉船的力 F_1 之比为

$$\frac{F_1}{F_0}=e^{\mu_s\theta},$$

式中 μ_s 为船缆和系船柱之间的静摩擦因数，θ 为船缆绕系船柱转过的角度．此即著名的欧拉皮带理论．

7.2 射箭运动员将箭竖直向上发射，设阻力 $F=-\frac{\rho\sigma c}{2}v^2$. 已知空气密度 $\rho=1.293\text{kg/m}^3$，箭的质量 $m=25\text{ g}$，其截面积 $\sigma=0.5\text{ cm}^2$，阻力系数 $c=1.00$，初速 $v_0=75\text{ m/s}$. 求此箭可以上升的最大高度和所需时间，以及落回到原发射点时的速度和时间.

7.3 同上题，设箭水平射出，求离发射点 50 m 处箭下降的距离.



题 7.6 图

7.4 质量为 m、摆长为 l 的单摆在有阻尼的介质中作微振动. 假定阻力 $F=-2mkv$，求单摆的振动周期.

7.5 若突然将一以全速 v_∞ 行驶的船的发动机倒开，试计算船在完全停止前继续向前滑行的时间和距离，设船的阻力始终和速度的平方成正比.

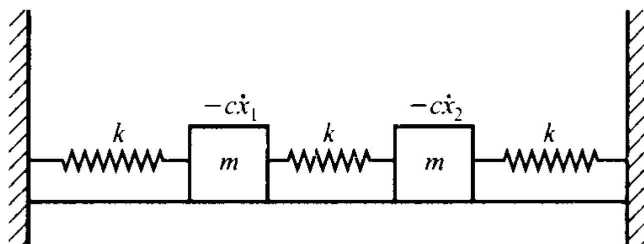
7.6 RLC 电路和力学体系的对应关系还可以有另一种模式. 试以图所示的简单 RLC 并联电路为例，证明如取电压 u 为广义坐标 q，则相应的动能 T、势能 V、耗散函数 G 和广义力 Q 为：

$$T=\frac{1}{2}C\dot{u}^2,\quad V=\frac{1}{2L}u^2,$$

$$G=\frac{1}{2R}\dot{u}^2,\quad Q=\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

7.7 设阻力与速度的一次方成正比，$F=-m\beta v$，求抛射体的轨道方程，并求获得最大射程时出射角所满足的条件.

7.8 如图所示，由两个相同的滑块和三个相同的弹簧所组成的力学体系，平衡时弹簧处于固有长度；设体系运动时，滑块所受的阻力和速度的一次方成正比，求体系的振动频率.



题 7.8 图

7.9 质量为 m 的质点，初速为零，从离地面高为 h 的地方自由下落. 与此同时，在其正下方的地面上有一相同质量的质点以初速 v_0 垂直上抛. 设空气的阻力 $F=-mkv$，求两质点在空中可相遇的条件及相遇时的时间和高度.

7.10 直杆 OA 在光滑水平面上以等角速度 ω 绕其固定端 O 转动，同时它推动一个在这个平面上的质量为 m 的小方块. 如果方块与杆之间的摩擦因数为 μ，求方块沿杆的相对运动规律. 设 $t=0$ 时方块与 O 点距离为 d，相对于杆的速度为零.

7.11 证明不论阻力的性质如何，质点在阻尼介质中作抛射运动时，恒存在关系式

$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{g}{v_x^2}$.

7.12 质量为 m 的质点在阻尼介质中作直线运动,初速度为零. 假定作用在质点上总的合力为 $F=a+bv-cv^2$,v 为质点的速度,a、b、c 为常数. 求质点的速度随时间的变化规律.

第八章　经典力学的哈密顿理论

凡是用正则坐标表述的经典力学理论都属于哈密顿理论的范畴. 本章首先介绍正则坐标和哈密顿函数的概念;然后建立三种不同形式的哈密顿动力学方程:哈密顿正则方程、哈密顿原理、哈密顿-雅可比方程. 正则坐标的变换在哈密顿理论中有重要的地位,哈密顿理论的许多优越性与此有密切关系,本章对此将作重点讨论.

§8.1　正则共轭坐标

坐标的概念对学物理的人来说,有一个不断深化的认识过程. 本节要讨论一种全新的坐标——**正则共轭坐标**. 为了加深对它的认识,我们先把本课程已经涉及到的坐标概念作一回顾.

力学研究物质的空间位置随时间变化的规律. 为了表示空间位置,我们首先引入了笛卡尔直角坐标. 但在某些情况下,用直角坐标表示空间位置不方便,因此我们又引入了极坐标、柱坐标、球坐标等曲线坐标. 直角坐标和曲线坐标有两个共同的功能,一是用三个坐标值表示空间一点的位置,二是确定空间一组相互正交的单位矢量. 有了单位矢量,任何一个有方向的力学量,都可以统一用这组单位矢量来表示. 直角坐标的单位矢量与物体的运动无关,是固定不变的;曲线坐标的单位矢量是随质点所在的位置而改变的. 此外我们还曾引入由质点的速度方向所决定的一组称为自然坐标的单位矢量. 以上这些坐标在§1.2中作过详细的讨论. 坐标概念从直角坐标到曲线坐标、自然坐标的拓展,给牛顿方程的表述和求解带来了许多方便. 这是坐标概念的第一次飞跃.

在建立拉格朗日方程时我们引入了广义坐标,这是坐标概念的又一次飞跃. 拉格朗日方程的优越性是与使用广义坐标密不可分的. 在讨论多自由度体系的微振动问题时,如果我们能选用简正坐标,则每个动力学方程只含一个变量,方程的解自动得出,从中我们可以体会到坐标选择的重要性. 欧拉由于恰当地选用欧拉角作为描述刚体转动的坐标,从而建立了刚体定点转动的理论,这是坐标选择重要性的又一个例子.

从上面的回顾中我们可以看到,力学理论的每一步重大的发展,都是和坐标

概念的拓展紧密相连的. 本章我们要讨论经典力学的哈密顿(W. R. Hamilton, 1805—1865)理论,它是由于坐标概念又一次新的飞跃而形成的. 哈密顿理论所使用的坐标称为正则共轭坐标,下面我们就首先来建立正则共轭坐标的概念.

在§5.3中我们曾讲过拉格朗日函数具有不确定性:如果 $L_1(q,\dot{q},t)$ 满足拉格朗日方程,即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L_1}{\partial q_\alpha}=0,\quad \alpha=1,2,\cdots,s, \tag{1.1}$$

此时如取

$$L_2(q,\dot{q},t)=L_1(q,\dot{q},t)+\frac{\mathrm{d}f(q,t)}{\mathrm{d}t}, \tag{1.2}$$

其中 $f(q,t)$ 是广义坐标 q 和时间 t 的一个任意函数,则 L_2 也满足拉格朗日方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L_2}{\partial t}=0,\quad \alpha=1,2,\cdots,s. \tag{1.3}$$

也就是说,虽然 L_1 和 L_2 是两个不同的函数,但由(1.1)式和(1.3)式所得的解 $q_\alpha=q_\alpha(t)$ 是完全一样的,或者说,在经典力学的拉格朗日理论中,一个力学体系的拉格朗日函数不是唯一的,不同的拉格朗日函数之间可以相差一项 $\frac{\mathrm{d}f(q,t)}{\mathrm{d}t}$. 由于 $f(q,t)$ 是任意的,因此一个力学体系的拉格朗日函数实际上有无穷多个. 通常我们取 $L=T-V$ 这样一种形式,是因为一般情况下这种形式比较简单而已.

在经典力学的拉格朗日理论中,与广义坐标 q_α 对应的广义动量的定义是:

$$p_\alpha=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}. \tag{1.4}$$

如果一个力学体系的拉格朗日函数 L 是唯一的,那么根据(1.4)式,与 q_α 对应的 p_α 也是唯一的,两者一一对应. 但由(1.2)式,由于 $L_1(q,\dot{q},t)$ 和 $\frac{\mathrm{d}f(q,t)}{\mathrm{d}t}$ 中都含有 $\dot{q}_\alpha$,因此 $\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_\alpha}$ 和 $\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_\alpha}$ 将是两个不同的力学量. 由于 $f(q,t)$ 是任意的,因此与广义坐标 q_α 所对应的广义动量 p_α,可以有无穷多个,用数学的术语来说,p_α 是与 q_α 完全独立的. 如果我们限定拉格朗日函数只能取 $L=T-V$ 一种形式,这相当于我们给(1.2)式加了一规范条件:$f(q,t)$ 与坐标 q 无关,只是时间 t 的函数,或为常量. 加了这样一个规范条件后,p_α 与 q_α 就一一对应了. 但这个规范条件并非理论本身所必需的.

对经典力学的拉格朗日理论作了上述分析后,现在我们来思考这样一个问

题:如果保留广义坐标的概念不变,保留广义动量的定义(1.4)式不变,并且对(1.2)式中的函数 $f(q,t)$ 不作限制,使 p_α 与 q_α 保持独立地位,我们将得到一种怎样的力学理论?它是否会带来一些经典力学牛顿理论和拉格朗日理论所没有的优点?本章我们所要讨论的经典力学的哈密顿理论正是这样一种理论,它所使用的坐标——由(1.4)式所定义的共 s 对 p_α、q_α,其中 p_α 完全独立于 q_α——称为正则共轭坐标,或正则共轭变量.哈密顿理论特别适用于将力学理论推广到物理学的其他领域,在本章中我们将对此作出原则说明,在下一章中我们再通过具体例证来说明它的实际应用.

§8.2 哈密顿函数和正则方程

本节我们来建立经典力学哈密顿理论的基本方程——**哈密顿正则方程**.哈密顿方程可通过多种途径建立,本节中我们用最简单的方法,从拉格朗日方程出发把它建立起来,其他的问题将留到后面再作逐步深入的讨论.

拉格朗日函数是 $\dot{q}_\alpha$、q_α 和 t 的函数,它的全微分

$$\mathrm{d}L = \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\mathrm{d}\dot{q}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\mathrm{d}q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t.$$

利用(1.4)式和拉格朗日方程,上式可改写为

$$\mathrm{d}\Big(\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot{q}_\alpha - L\Big) = \sum_{\alpha=1}^{s}\dot{q}_\alpha\mathrm{d}p_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{s}\dot{p}_\alpha\mathrm{d}q_\alpha - \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t. \tag{2.1}$$

上式左边括号内的量在§2.7中已经见过,是体系的广义能量 H:

$$H = \sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot{q}_\alpha - L. \tag{2.2}$$

将 $\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot{q}_\alpha - L$ 直接写下来,H 中将同时出现 p_α、q_α、$\dot{q}_\alpha$ 三种变量,它们共有 $3s$ 个.这 $3s$ 个变量不是独立的,独立的只有 $2s$ 个.(2.1)式右边已明确表示我们选用了 $2s$ 个 p_α、q_α 为独立变量,所以它的右边即(2.2)式中的 $\dot{q}_\alpha$ 要改用 p_α、q_α 来表示.这是容易办到的.因为 L 是 q_α、$\dot{q}_\alpha$ 和 t 的函数.因此,由(1.4)所定义的 p_α 也是 q_α、$\dot{q}_\alpha$ 和 t 的函数:

$$p_\alpha = p_\alpha(q,\dot{q},t), \quad \alpha = 1,2,\cdots,s.$$

由此即可解得

$$\dot{q}_\alpha = \dot{q}_\alpha(p,q,t), \quad \alpha = 1,2,\cdots,s.$$

将上式代入(2.2)即可将 H 用独立变量 p_α、q_α 表示:

$$H = H(p, q, t) = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \widehat{\dot{q}_{\alpha}} - \widehat{L}. \tag{2.3}$$

我们在 $\dot{q}_{\alpha}$ 和 L 上加上记号⌒,表示其中的 $\dot{q}_{\alpha}$ 应用 p_{α}、q_{α} 表示. $H(p, q, t)$称为体系的**哈密顿函数**,它和拉格朗日函数一样,也是体系的状态函数.

在§2.7 中已经证明,当体系的能量守恒时,函数 H 就是能量 E,因此对于能量守恒的体系,我们也可直接由

$$H = T + V$$

来写出体系的哈密顿函数,当然其中动能 T 中的 $\dot{q}_{\alpha}$ 也必须用 p_{α}、q_{α} 来表示.

既然由(2.3)所定义的哈密顿函数是 p_{α}、q_{α} 和 t 的函数,那么它的全微分可表示为

$$\mathrm{d}H = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} \mathrm{d}p_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \mathrm{d}q_{\alpha} + \frac{\partial H}{\partial t} \mathrm{d}t. \tag{2.4}$$

将(2.4)与(2.1)比较,二者都是以 p_{α}、q_{α}、t 为独立变量的哈密顿函数 H 的全微分的表示式,因此对应的 $\mathrm{d}p_{\alpha}$、$\mathrm{d}q_{\alpha}$、$\mathrm{d}t$ 项的系数应该相等. 由此得

$$\begin{cases} \dot{q}_{\alpha} = \dfrac{\partial H}{\partial p_{\alpha}}, \\ \dot{p}_{\alpha} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_{\alpha}}, \end{cases} \qquad \alpha = 1, 2, \cdots, s, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{2.6}$$

(2.5)称为**哈密顿方程**,它和拉格朗日方程相当,也是体系的运动方程. 拉格朗日方程是 s 个二阶方程,哈密顿方程是 $2s$ 个一阶方程,在数学上是完全等价的. 哈密顿方程对于自变量 p_{α}、q_{α} 的形式十分对称,因此,又称它为**正则运动方程**或**正则方程**. p_{α}、q_{α} 之所以称为**正则变量**,其原因亦在于此.

哈密顿函数对时间的全微商是:

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} \dot{p}_{\alpha} + \frac{\partial H}{\partial t}.$$

将(2.5)和(2.6)代入上式,则右边前两项正好互相抵消. 于是得

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t}, \tag{2.7}$$

这是哈密顿函数的一个重要性质. 当 H 不显含时间时,$\partial H / \partial t = 0$,于是得 $\mathrm{d}H/\mathrm{d}t = 0$,即 $H =$ 常数. 这就是能量守恒定律,和§2.7 中得出的结论一致.

除了动力学的变量 q_{α}、$\dot{q}_{\alpha}$ 或 p_{α}、q_{α} 外,拉格朗日函数和哈密顿函数还可能包含各种参数. 这些参数可以是力学体系本身的特性,也可以是作用在体系上的外场的特性. 假定 λ 是这些参数中的一个,把它看成变量,即 $L = L(\dot{q}, q, t, \lambda)$,则由拉格朗日方程得

$$\mathrm{d}L = \sum_{\alpha=1}^{s} \dot{p}_\alpha \mathrm{d}q_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \mathrm{d}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial L}{\partial \lambda}\mathrm{d}\lambda,$$

代入 $\mathrm{d}H = \mathrm{d}\left(\sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \dot{q}_\alpha - L\right)$ 中得

$$\mathrm{d}H = \sum_{\alpha=1}^{s} \dot{q}_\alpha \mathrm{d}p_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{s} \dot{p}_\alpha \mathrm{d}q_\alpha - \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t - \frac{\partial L}{\partial \lambda}\mathrm{d}\lambda.$$

而另一方面 $\mathrm{d}H$ 又可表示为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}H &= \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\mathrm{d}p_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\mathrm{d}q_\alpha + \frac{\partial H}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial H}{\partial \lambda}\mathrm{d}\lambda \\ &= \sum_{\alpha=1}^{s} \dot{q}_\alpha \mathrm{d}p_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{s} \dot{p}_\alpha \mathrm{d}q_\alpha + \frac{\partial H}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial H}{\partial \lambda}\mathrm{d}\lambda\end{aligned}$$

由此得

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_{p,q} = -\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_{q,\dot{q}}. \tag{2.8}$$

实际上(2.6)式可以看成是(2.8)式的一个特例,即时间 t 在从 L 到 H 的变换过程中仅仅是一个参数,它和函数独立变量的变换无关.

上面所讨论的仅仅限于保守体系的情况,如果体系除了保守力 $-\dfrac{\partial V}{\partial q_\alpha}$外,还有广义非保守力 Q_α,则拉格朗日方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha,\ \alpha = 1,2,\cdots,s,$$

其中 $L = T - V$,重复以上的运算可得体系的哈密顿方程的形式为

$$\begin{cases} \dot{q}_\alpha = \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \\ \dot{p}_\alpha = -\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha} + Q_\alpha, \end{cases} \tag{2.9}$$

$$\alpha = 1,2,\cdots,s.$$

其余的一些结论仍保持不变.

【例 1】 写出粒子在中心势场 $V = -\dfrac{\alpha}{r}$ 中的哈密顿函数和正则方程.

解:粒子的拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{\alpha}{r}, \tag{1}$$

所以

$$\begin{cases} p_r = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \\ p_\theta = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}. \end{cases} \tag{2}$$

由(2)可得

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}. \tag{3}$$

中心势场中粒子的能量是守恒的,因此粒子的哈密顿函数为

$$\begin{aligned} H &= T + V \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{\alpha}{r} \\ &= \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{p_r}{m}\right)^2 + r^2\left(\frac{p_\theta}{mr^2}\right)^2\right] - \frac{\alpha}{r} \\ &= \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) - \frac{\alpha}{r}. \end{aligned} \tag{4}$$

于是得正则方程:

$$\begin{cases} \dot{r} = \dfrac{\partial H}{\partial p_r} = \dfrac{p_r}{m}, \\ \dot{p}_r = -\dfrac{\partial H}{\partial r} = \dfrac{p_\theta^2}{mr^3} - \dfrac{\alpha}{r^2}, \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\theta} = \dfrac{p_\theta}{mr^2}, \\ \dot{p}_\theta = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta} = 0. \end{cases} \tag{6}$$

由(5)得

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{\alpha}{r^2}, \tag{7}$$

此即粒子的径向运动方程. 由(6)得

$$p_\theta = mr^2\dot{\theta} = \text{常数}, \tag{8}$$

此即为我们所熟知的角动量守恒定律.

【例 2】 写出粒子在等角速度转动参考系中的哈密顿函数和正则方程.

解: 以等角速度 ω 转动的参考系中,粒子的拉格朗日函数为[见第五章(3.5)式]:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + m\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) + \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})^2 - V. \tag{1}$$

所以

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = m\boldsymbol{v} + m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}. \tag{2}$$

由此得

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{p}}{m} - \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}. \tag{3}$$

按定义,粒子的哈密顿函数为

$$\begin{aligned} H &= \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v} - L \\ &= (m\boldsymbol{v} + m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{v} - \left[\frac{1}{2}mv^2 + m\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) + \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})^2 - V\right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})^2 + V.$$

将(3)代入,最后得

$$H = \frac{p^2}{2m} - \boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + V. \tag{4}$$

这就是等速转动参考系中自由粒子的哈密顿函数.

将(4)代入正则方程,得

$$\begin{cases} \boldsymbol{v} = \dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} = \dfrac{\boldsymbol{p}}{m} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}, \\ \dot{\boldsymbol{p}} = -\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{r}} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{\omega} - \dfrac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}}. \end{cases} \tag{5}$$

将(2)代入上面第二个方程,并考虑到 $-\dfrac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}$ 就是粒子所受的力,$\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$,得

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) - 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}. \tag{6}$$

它就是等速转动参考系中的牛顿动力学方程.

从上面两个例子中可以看到,哈密顿函数和正则方程,确实同拉格朗日函数和拉格朗日方程一样,可以描述力学体系的运动状态,给出正确的动力学方程,只要坐标选取得一样,由正则方程所得出的动力学方程和牛顿动力学方程及由拉格朗日方程所得到的方程完全一样.

正则方程的优越性在上面两个例子中并没有反映出来,我们将留到以后再作讨论.

【例 3】 写出带电粒子在电磁场中的哈密顿函数.

解: 在§2.5中我们已给出带电粒子在电磁场中的拉格朗日函数

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - e\varphi + e\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v}, \tag{1}$$

因此粒子的动量为

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = m\boldsymbol{v} + e\boldsymbol{A}. \tag{2}$$

根据哈密顿函数定义式(2.2)得

$$H = \sum_\alpha p_\alpha \dot{q}_\alpha - L = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v} - L$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + e\varphi.$$

由(2)得 $m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}$,代入上式得

$$H = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})^2 + e\varphi. \tag{3}$$

(3)式即为带电粒子在电磁场中的哈密顿函数,在量子力学中要经常用到它.

§8.3 变分问题的欧拉方程

在力学中,能起“几何公理”作用,可由它导出全部力学定律的原理或假设,

称为力学第一性原理或最高原理. 显然牛顿运动定律就是这样一种力学原理. 以牛顿运动定律作为力学第一性原理来建立整个经典力学的理论体系,最易于理解,最符合历史发展,但它决不是唯一的,更不是最优越的一种方案. 事实上,1788 年拉格朗日发表的《分析力学》一书,是以**虚功原理**为力学第一性原理的,目前许多分析力学教材则以**达朗贝尔原理**为力学第一性原理. 对这两种理论体系我们不准备讨论,因为只要把我们在第二章中导出拉格朗日方程的逻辑程序倒过来即可,没有更多新的物理内容. 下节将讨论另一类建立经典力学理论体系的方法——**最小作用量原理**,它最主要的优点是易于推广到非机械运动的物理体系,可看成是整个物理学的第一性原理. 这一方法是和数学上的变分问题密切连在一起的. 本节我们首先对变分法的问题作一简单介绍.

数学上的变分法是为了解决一个力学问题——**最速落径问题**而发展起来的. 最速落径是这样一个问题:如图 8.1 所示,铅直平面内在所有连接两个定点 A 和 B 的曲线中,找出一条曲线来,使得初速度为零的质点,在重力的作用下,自 A 点沿它无摩擦地下滑时,以最短时间到达 B 点.

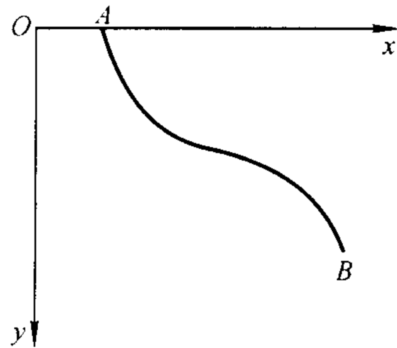


图 8.1

这是一个求极值的问题,但它和一般的求函数的极值问题不同,是一个所谓**泛函极值问题**. 什么叫泛函呢? 如果 $y(x)$是 x 的函数,那么 $J[y(x)]$就称为函数 $y(x)$的**泛函数**,简称**泛函**. 我们知道,质点自 A 沿任一光滑曲线$y(x)$自由滑下时,速度 v 与坐标y 之间的关系是

$$v = \sqrt{2gy} ,$$

式中 g 是重力加速度. 而速度 v 可表示为

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}}{\mathrm{d}t} = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x .$$

因此,质点自 A 沿曲线$y(x)$自由滑下到 B 点所需的时间是

$$J = \int_{x_A}^{x_B} \mathrm{d}t = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}}\mathrm{d}x , \tag{3.1}$$

式中积分的上下限是固定的. 显然 J 的值和函数$y(x)$有关. 我们所讨论的问题是 $y(x)$取什么函数时,泛函 $J[y(x)]$取极小值. 所以最速落径问题是求泛函的极值问题.

泛函 $J[y(x)]$取极值的条件为 $\delta J = 0$,算符 δ 称为变分记号. 变分算符 δ 和微分算符 d 的运算极为相似,所不同的是:这里的泛函 $J[y(x)]$的变分 δJ 所讨论的是由于函数$y(x)$的改变所引起的改变,而并不考虑自变量 x 的改变所引起的改变;而微分则是讨论由于自变量 x 的改变所引起的改变. 因此这里的变

分算符和微分算符对自变量 x 的作用是不一样的：$\delta x=0$ 而 $\mathrm{d}x\neq 0$，除此之外，可以认为两者的运算是一样的．实际上这种变分算符我们在虚位移中已经用过，在那里自变量是 t，因此 $\delta t=0$．

可以证明，δ 和 d 的运算次序可以交换．图 8.2 中曲线 $APQB$ 表示函数$y(x)$，曲线 $AP'Q'B$ 表示另一函数$y_1(x)$．从 $P(x,y)$点到 Q 点函数 $y(x)$没有改变，自变量则从 x 变为 $x+\mathrm{d}x$，因此 Q 点的坐标是 $x+\mathrm{d}x$、$y+\mathrm{d}y$．P'点的 x 坐标和 P 点相同，但 P'点和 P 点是在两条不同的函数曲线上．所以从 P 点到 P'点是由于函数从 y 变为 $y+\delta y$所引起的，自变量没有改变，因此 P'点的坐标应为$(x,y+\delta y)$．最后我们来看 Q'点的坐标，

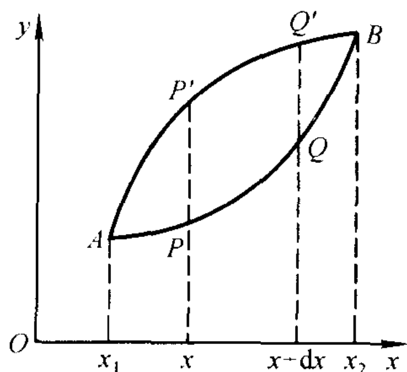


图 8.2

Q'点既可以从Q 点变更过去，也可以从 P'点变更过去．前者是变分，Q'点的纵坐标应为$(y+\mathrm{d}y)+\delta(y+\mathrm{d}y)$；后者是微分，$Q'$点的纵坐标应为$(y+\delta y)+\mathrm{d}(y+\delta y)$．这两种表示式应相等，因此得

$$\delta(\mathrm{d}y)=\mathrm{d}(\delta y). \tag{3.2}$$

这就表明变分和微分的运算可以交换．

由(3.2)我们还可证明 δ 和$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$也是可以交换的：

$$\delta\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\delta(\mathrm{d}y)\mathrm{d}x-\delta(\mathrm{d}x)\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\delta y). \tag{3.3}$$

现在我们来求泛函 $J[y(x)]$的变分为零的条件，为普遍起见，我们把(3.1)式改写为

$$J[y(x)]=\int_{x_1}^{x_2}f(y,y',x)\mathrm{d}x. \tag{3.4}$$

对上式变分，利用 $\delta x=0$ 和 δ 与$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$可以交换这两个性质得

$$\begin{aligned}\delta J&=\delta\int_{x_1}^{x_2}f(y,y',x)\mathrm{d}x=\int_{x_1}^{x_2}\delta f(y,y',x)\mathrm{d}x\\&=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'\right)\mathrm{d}x\\&=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y\right)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y\Big|_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)\delta y\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由于 x_1 和 x_2 对应固定的 A、B 两点：$\delta y_A=\delta y_B=0$，因此上式第一项为零，所以

由 $\delta J=0$ 的要求得

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'}-\frac{\partial f}{\partial y}\right]\delta y\mathrm{d}x=0.$$

由于 δy 是任意的,要使上式成立,必须

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'}-\frac{\partial f}{\partial y}=0. \tag{3.5}$$

方程(3.5)称为**欧拉方程**,是使(3.4)式的泛函取极值时函数 $y(x)$ 必须满足的条件.

如果(3.4)式中的 f 不显含自变量 x,则欧拉方程有初积分

$$f-y'\frac{\partial f}{\partial y'}=\text{常数}. \tag{3.6}$$

这是因为

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f-y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\\&=\left(\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial y'}y''\right)-\left(\frac{\partial f}{\partial y'}y''+y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\\&=-y'\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)=0.\end{aligned}$$

【例 1】 求最速落径方程.

解: 由(3.1)式,知最速落径的

$$f=\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}. \tag{1}$$

它不显含 x,因此(3.6)式成立. 将(1)代入(3.6)式并化简得

$$y(1+y'^2)=c_1. \tag{2}$$

引入参数 θ,使

$$y'=\cot\theta. \tag{3}$$

将(3)代入(2)式得

$$y=\frac{c_1}{1+\cot^2\theta}=\frac{c_1}{2}(1-\cos 2\theta). \tag{4}$$

而

$$\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}y}{y'}=2c_1\sin^2\theta\mathrm{d}\theta,$$

积分得

$$x=\frac{c_1}{2}(2\theta-\sin 2\theta)+c_2. \tag{5}$$

所以最速落径的参数方程为

$$\begin{cases}x-c_2=\dfrac{c_1}{2}(2\theta-\sin 2\theta),\\ y=\dfrac{c_1}{2}(1-\cos 2\theta).\end{cases} \tag{6}$$

这是一条旋轮线方程.

【例 2】 求悬链线方程.

解:两端固定的均匀重链在重力场中处于平衡状态时链的形状称为**悬链线**. 为简单起见,设链的两个固定悬点 A 和 B 在同一水平位置,并取链的最低点的坐标为$(0,a)$,如图 8.3 所示. 假定链的线密度为 ρ,则体系的势能为

$$V=\int_{x_A}^{x_B}\rho g y\mathrm{d}s$$

$$=\rho g\int_{x_A}^{x_B}y\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x. \tag{1}$$

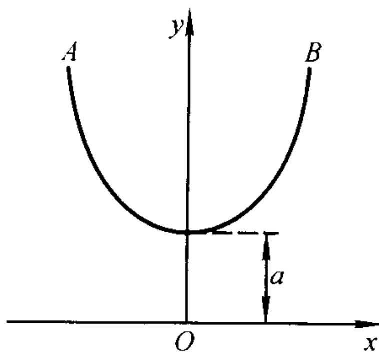


图 8.3

上式中的函数 $y(x)$就是悬链线方程. (1)式表明体系的势能 V 是函数$y(x)$的泛函. 我们知道保守体系处于平衡状态时势能取极值,$\delta V=0$,因此求悬链线方程归结为求势能的极值条件,即解欧拉方程.

由(1)式得

$$f=y\sqrt{1+y'^2}. \tag{2}$$

f 不显含自变量 x,因此将(2)代入(3.6)式得

$$y\sqrt{1+y'^2}-\frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}}=c,$$

化简后得

$$1+y'^2=\frac{y^2}{c^2}. \tag{3}$$

由此得

$$\frac{c\mathrm{d}y}{\pm\sqrt{y^2-c^2}}=-\mathrm{d}x, \tag{4}$$

积分得

$$y=a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a} \tag{5}$$

这就是图 8.3 所示的悬链线方程. (4)式中的常数 c 正好是图 8.3 中悬链线最低点的纵坐标 a.

§8.4 哈密顿原理

上节指出,由泛函取极值的条件 $\delta J=0$,可导出函数 $y(x)$满足的欧拉方程(3.5). 在(3.5)中,如果把自变量 x 换为时间 t,y 换为广义坐标 q,并相应地把 $f(y,y',x)$记为 $L(q,\dot{q},t)$,则欧拉方程即为我们所熟悉的拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q}=0.$$

上节的论述表明,在 t_1 和 t_2 时间内,如果 $q(t_1)$和 $q(t_2)$相同,在约束所允许的

各种可能的运动 $q(t)$ 中，由动力学规律（拉格朗日方程）所决定的真实运动（图 8.4 中的实线），可由泛函

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\mathrm{d}t \qquad (4.1)$$

取极值的条件

$$\delta S = \delta\int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\mathrm{d}t = 0 \qquad (4.2)$$

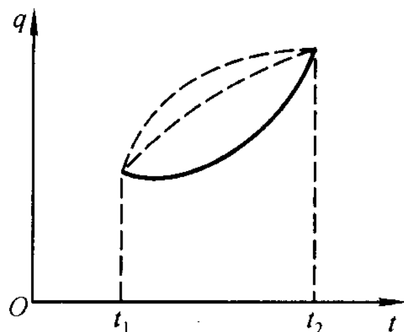


图 8.4

给出．S 称为**哈密顿作用量**．这一原理是 1834 年由哈密顿首先提出来的（欧拉方程是 1744 年由欧拉建立的），所以被称为**哈密顿原理**．

(4.1)和(4.2)式是对单个自由度的保守力学体系来说的．对于非保守体系，(4.2)式将被

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} [\delta T(q_a, \dot{q}_a, t) - \sum Q_a \delta q_a]\mathrm{d}t = 0 \qquad (4.3)$$

所代替，式中 Q_a 是广义力．

我们举一个具体的例子来解释一下哈密顿原理的含义．如图 8.5 所示，设约束在光滑铅直线上的质量为 m 的质点，在 $t_1 = 0$ 时从 A 点自由下落，到时刻 $t_2 = T$ 时到达 B 点．$AB = h = gT^2/2$．此力学体系的拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx.$$

相应的哈密顿作用量为

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx\right)\mathrm{d}t, \qquad (4.4)$$

其值和函数 $x(t)$ 的形式有关．哈密顿原理说，在符合所给条件的各种可能的函数 $x(t)$ 中，其实运动 $x = gt^2/2$ 使(4.4)的积分取极小值．为此，我们另外取四

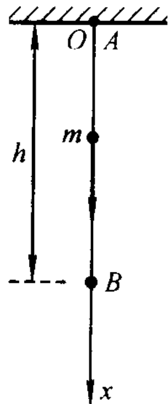


图 8.5

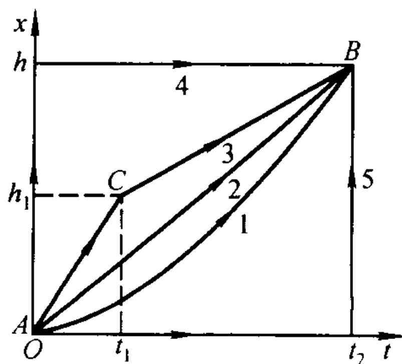


图 8.6

种符合所给条件的函数和它作比较,它们如图 8.6 中的曲线 2、3、4、5 所示*. 曲线 1 代表真实运动.

(1) 真实运动

$$x = \frac{1}{2}gt^2, \quad \dot{x} = gt.$$

$$S_1 = \int_0^T \left[\frac{1}{2}mg^2t^2 + \frac{1}{2}mg^2t^2\right]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{3}mg^2T^3.$$

(2) 全程等速运动

$$x = v_0 t, \quad v_0 = \frac{1}{2}gT, \quad \dot{x} = v_0.$$

$$S_2 = \int_0^T \left[\frac{1}{2}mv_0^2 + mgv_0t\right]\mathrm{d}t = \frac{3}{8}mg^2T^3.$$

(3) 分段等速运动

在 t 从 0 到 T_1 时以等速 v_1 从 A 点运动到 C 点,在 T_1 到 T 时以等速 v_2 从 C 点运动到 B 点.

$$S_3 = \int_0^{T_1}\left[\frac{1}{2}mv_1^2 + mgv_1t\right]\mathrm{d}t + \int_{T_1}^{T}\left[\frac{1}{2}mv_2^2 + mgv_1T_1 + mgv_2(t - T_1)\right]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}mv_1^2T_1 + \frac{1}{2}mgv_1T_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2(T - T_1) +$$

$$mg(v_1 - v_2)T_1(T - T_1) + \frac{1}{2}mgv_2(T^2 - T_1^2).$$

设图中的曲线 3 所对应的 $T_1 = \frac{T}{3}$, $h_1 = \frac{h}{2} = \frac{1}{4}gT^2$,代入 $T_1v_1 = h_1$ 和 $(T - T_1)v_2 = h - h_1$ 可解得 $v_1 = \frac{3}{4}gT$, $v_2 = \frac{3}{8}gT$. 因此

$$S_3 = \frac{83}{192}mg^2T^3.$$

(4) 曲线 4 相当于分段等速运动中 $T_1 \to 0, h_1 = h$, $v_1T_1 = h$,因此 $v_1 \to \infty, v_2 = 0$,所以

$$S_4 = \lim_{\substack{v_1\to\infty \\ T_1\to 0}}\left[\frac{1}{2}mv_1^2T_1 + \frac{1}{2}mgv_1T_1^2\right]$$

---

* 严格的说,哈密顿原理所比较的是真实路径和其无限邻近的各种可能路径的作用量的值. 这里为了使计算能说明问题,所比较的各条路径选取得不是无限邻近的.

$$= \lim_{\substack{v_1 \to \infty \\ T_1 \to 0}} \frac{1}{2} mh(v_1 + gT_1) \to \infty .$$

(5) 曲线 5 相当于分段等速运动中 $T_1 = T, h_1 = 0$，$v_2(T - T_1) = h$. 因此 $v_1 = 0$，$v_2 \to \infty$，所以

$$S_5 = \lim_{\substack{v_2 \to \infty \\ T_1 \to T}} \left[\frac{1}{2} mv_2^2 (T - T_1) + \frac{1}{2} mgv_2 (T^2 - T_1^2) \right]$$

$$= \lim_{\substack{v_2 \to \infty \\ T_1 \to T}} \frac{1}{2} mh[v_2 + g(T + T_1)] \to \infty .$$

根据这些计算，我们得

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{9}{8}, \frac{S_3}{S_1} = \frac{83}{64}, \frac{S_4}{S_1} \to \infty, \frac{S_5}{S_1} \to \infty .$$

这表明由(4.4)所定义的作用量，在所比较的各条路径中，真实路径确实取极小值.

力学体系的真实运动是由动力学方程决定的. 哈密顿原理可从各种运动学所允许的可能运动中把真实运动挑选出来，表明哈密顿原理本身就是动力学规律的一种表述形式. 实际上确实可从哈密顿原理导出以前所得出的各种动力学方程，因此哈密顿原理也可作为力学中的第一性原理.

应该指出，上节从最速落径问题写出欧拉方程时，我们并没有证明泛函 $J[y(x)]$ 取极小值的条件是 $\delta J = 0$. 我们只是借用了微分法中函数 $f(x)$ 取极小值的条件 $\mathrm{d}f = 0$ 的类比而得出这个结论，这个结论的严格证明可参阅有关变分法的书. 但对哈密顿原理来说，如果承认拉格朗日方程是正确的，那么重复上节推导欧拉方程的步骤，就可以从拉格朗日方程导出哈密顿原理. 反之，如果我们把哈密顿原理作为力学第一性原理，那么重复上节的推导，也可由哈密顿原理导出拉格朗日方程.

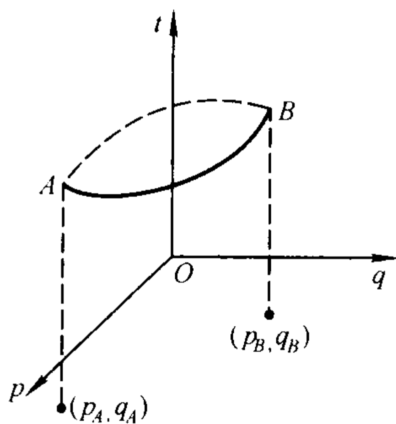


图 8.7

从哈密顿原理也可直接导出正则方程，其步骤和导出欧拉-拉格朗日方程基本相同，唯一的差别是在正则方程中广义动量 p_α 和广义坐标 q_α 有相同的地位，都是独立变量，因此应该在如图 8.7 所示的 $2s+1$ 维空间中作端点 A 和 B 固定的等时变分，具体推导如下：

将 $L = \sum_\alpha p_\alpha \dot{q}_\alpha - H$ 代入(4.2)式得

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_\alpha(p_\alpha\delta\dot{q}_\alpha+\dot{q}_\alpha\delta p_\alpha)-\sum_\alpha\left(\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha+\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha\right)\right]\mathrm{d}t=0.$$

式中第一项的积分可改写为

$$\begin{aligned}&\int_{t_1}^{t_2}\sum_\alpha p_\alpha\delta\dot{q}_\alpha\mathrm{d}t\\&=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_\alpha p_\alpha\delta q_\alpha\right)-\sum_\alpha\dot{p}_\alpha\delta q_\alpha\right]\mathrm{d}t\\&=\sum_\alpha p_\alpha\delta q_\alpha\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\dot{p}_\alpha\delta q_\alpha\mathrm{d}t\\&=-\int_{t_1}^{t_2}\dot{p}_\alpha\delta q_\alpha\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

上式最后一步中我们利用了 $\delta q_\alpha(t_1)=\delta q_\alpha(t_2)=0$. 于是我们得到

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_\alpha\left(\dot{q}_\alpha-\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\right)\delta p_\alpha-\sum_\alpha\left(\dot{p}_\alpha+\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right)\delta q_\alpha\right]\mathrm{d}t=0.$$

因为 p_α 和 q_α 是互相独立的动力学变量,要使上式恒成立,只有被积函数 δp_α 和 δq_α 的系数为零. 于是得

$$\begin{cases}\dot{q}_\alpha=\dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha},\\[2mm]\dot{p}_\alpha=-\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha}.\end{cases}$$

这就是**哈密顿正则方程**.

也有人把哈密顿原理称作**哈密顿最小作用量原理**. 最小作用量原理最早是**莫培督**(Maupertuis)于 1744 年提出来的,但其形式和上述哈密顿提出的有所不同. 莫培督把

$$W=\sum_{i=1}^n\int_A^B m_i\boldsymbol{v}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i \tag{4.5}$$

叫做**作用量**,他断言完整、保守的力学体系在位形空间确定的始末位置 A 和 B 之间一切可能的运动中,真实运动的作用量 W 具有极小值

$$\Delta W=\Delta\sum_{i=1}^n\int_A^B m_i\boldsymbol{v}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i=0. \tag{4.6}$$

这里我们用 Δ 表示莫培督原理中的变分记号,下面我们要指出,它和哈密顿原理中的变分记号 δ 的运算性质有所不同.

莫培督提出这个原理的时候,并没有给予证明,直到 1760 年拉格朗日才从数学上严格地给出了证明,明确了变分算符 Δ 的性质,并且利用

$$\sum_{i=1}^n m_i\boldsymbol{v}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i=\sum_{i=1}^n m_i\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_i\mathrm{d}t=2T\mathrm{d}t=\sum_\alpha p_\alpha\mathrm{d}q_\alpha$$

改写为

$$\Delta W = \Delta\int_A^B 2T\mathrm{d}t = \Delta\int_A^B \sum_\alpha p_\alpha \mathrm{d}q_\alpha = 0 \ . \qquad (4.$$

(K.G.J.Jacobi，1804—1851)又利用

$$2T = \sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta = \sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}q_\alpha \mathrm{d}q_\beta}{\mathrm{d}t^2}$$

$$2T = 2(E - V),$$

中的积分改写为

$$\int^{t_2} 2T\mathrm{d}t = \int^B \sqrt{2(E-V)}\ \sqrt{\sum A_{\alpha\beta}\mathrm{d}q_\alpha \mathrm{d}p_\alpha}\ .$$

| 传输完毕！

§8.5 正则变换

处理任何一个动力学问题,首先总是先写出它的动力学方程,然后再从数学上求解这个方程式.一般情况下,一个力学问题的动力学方程是一组二阶非线性常微分方程组,在数学上并无常规的求得解析形式解的一般方法.总结以前的许多例子,我们可以发现,不论用牛顿方程、拉格朗日方程还是哈密顿方程,只要选用的广义坐标相同,所得的微分方程组最后都是一样的;选用不同的广义坐标,所得的微分方程的形式不一样,数学上求解这些方程的难易程度可以相差很大.广义坐标如果选取得好,可使微分方程组变量分离,一个方程只含一个未知函数,例如振动问题中选用简正坐标;或者可以使每个方程都能直接积分,使二阶方程变为一阶方程,这只要选取循环坐标和守恒定律即可做到.选取了这样的好坐标,微分方程组的求解就变得十分容易.但如果坐标选取得不好,方程的求解就会变得十分困难.因此如何选取广义坐标就成为理论力学中最富技巧性的一个环节.以前我们分别就各种典型力学问题,指出不同的问题应选什么样的坐标比较好.例如两体问题应取质心坐标和相对运动坐标,相对运动部分应选取极坐标,这样变量就可分离,并且都可直接积分,如果选用两个粒子的直角坐标,方程就会变得十分复杂,难以求解.再如刚体转动问题应选取欧拉角为广义坐标,微振动问题应选取平衡位置为坐标原点,尽可能选用简正坐标等等.哈密顿理论将独立坐标扩大了一倍,这意味着坐标选择的余地会更大.本节我们将讨论正则坐标变换的一般理论,进而指出一条寻找最佳坐标的巧妙方法.

我们先从拉格朗日方程的坐标变换说起.对于拉格朗日方程来说,设原来的一组广义坐标为 $q_1,q_2,\cdots,q_s$,现在作变换

$$Q_\alpha = Q_\alpha(q_1,q_2,\cdots,q_s,t),\ \alpha = 1,2,\cdots,s. \tag{5.1}$$

取 Q_α 为新的广义坐标后,虽然拉格朗日函数的具体形式要改变,但拉格朗日方程的形式不变,仍为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial Q_\alpha} = 0,\ \alpha = 1,2,\cdots,s.$$

这种变换我们是熟悉的,我们以前是经常这样做的.但对哈密顿正则方程来说,由于广义动量和广义坐标具有同样的地位,都是独立变量,(5.1)式只规定了广义坐标的变换,并没有规定广义动量如何变换,新动量 P_α 可以是任意的.我们常说拉格朗日函数 $L(q,\dot{q},t)$ 是 q_α 和 $\dot{q}_\alpha$ 的函数,这是就动力学的意义而说的.就运动学的意义说,由于 $\dot{q}_\alpha = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$,$q_\alpha$ 和 $\dot{q}_\alpha$ 并不独立,当 q_α 作变换(5.1)

时，$\dot{q}_\alpha$ 的变换也完全确定了．对正则变量 p_α 和 q_α 来说，在动力学和运动学意义上两者都是独立的．因此对于哈密顿正则方程来说，正则变量的一般变换关系应为

$$\begin{cases} Q_\alpha = Q_\alpha(q_1\cdots q_s; p_1\cdots p_s; t), \\ P_\alpha = P_\alpha(q_1\cdots q_s; p_1\cdots p_s; t), \end{cases} \quad \alpha = 1,2,\cdots,s. \tag{5.2}$$

变换(5.2)的任意性太大了．与拉格朗日方程在变换(5.1)下形式保持不变的情况不一样，如果变换后保持拉格朗日函数和哈密顿函数的定义不变：

$$L^*(Q,\dot{Q},t) = T - V,$$

$$H^*(P,Q,t) = \sum_\alpha P_\alpha \dot{Q}_\alpha - L^*(Q,\dot{Q},t),$$

那么正则方程一般将不再保持原来的形式．显然我们感兴趣的仅仅是这样一种变换：在变换(5.2)下，新的哈密顿函数 $H^*(P,Q,t)$ 仍然满足正则方程：

$$Q_\alpha = \frac{\partial H^*}{\partial P_\alpha},\ P_\alpha = -\frac{\partial H^*}{\partial Q_\alpha},\ \alpha = 1,2,\cdots,s. \tag{5.3}$$

满足条件(5.3)的正则坐标的变换(5.2)称为**正则变换**．

下面我们来寻找正则变换所应满足的具体条件．从哈密顿原理的讨论可知，正则方程和哈密顿原理是等价的，因此我们只要使变换(5.2)满足哈密顿原理的要求，就可以保证新的正则方程保持形式不变．对于原来的正则变量 p_α、q_α 和哈密顿函数 $H(p,q,t)$，我们有

$$\delta S = \delta\int_{t_1}^{t_2} L(\dot{q},q,t)\mathrm{d}t$$

$$= \delta\int_{t_1}^{t_2}\Big[\sum_\alpha p_\alpha \mathrm{d}q_\alpha - H(p,q,t)\mathrm{d}t\Big] = 0.$$

但由于 L 和 $L+\dfrac{\mathrm{d}f(q,t)}{\mathrm{d}t}$ 是等价的，为了使 p_α 完全独立于 q_α，在上式的积分号下应再加上一项 $\mathrm{d}f(q,t)$．不仅如此，被积函数加上一项全微分后，由于定积分 $\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}f$ 的值只和端点的函数值有关，而端点的变分恒为零，这是哈密顿变分算符 δ 所规定的运算规则，即 $\delta\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}f = 0$．因此函数 f 不仅可以是 q、t 的函数，而且也可以将 p 作为参数包含在内．也就是说，老的正则变量和老的哈密顿函数，就最一般的形式而言，应满足下面的关系式：

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\Big[\sum_\alpha p_\alpha \mathrm{d}q_\alpha - H(p,q,t)\mathrm{d}t + \mathrm{d}f_1(q,p,t)\Big]. \tag{5.4}$$

同样，如果新的正则变量 P_α、Q_α 和新的哈密顿函数 $H^*(P,Q,t)$ 满足正则方程(5.3)，则也应满足同样的关系式：

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_\alpha P_\alpha \mathrm{d}Q_\alpha - H^*(P,Q,t)\mathrm{d}t + \mathrm{d}f_2(P,Q,t)\right]. \tag{5.5}$$

f_2 与 f_1 一样,也是一个任意的函数. 将(5.4)和(5.5)式相减,并令

$$f_2(P,Q,t) - f_1(p,q,t) = F_1, \tag{5.6}$$

可得

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_\alpha (p_\alpha \mathrm{d}q_\alpha - P_\alpha \mathrm{d}Q_\alpha) + (H^* - H)\mathrm{d}t - \mathrm{d}F_1\right] = 0, \tag{5.7}$$

要使上式成立,只要取

$$\sum_\alpha p_\alpha \mathrm{d}q_\alpha - \sum_\alpha P_\alpha \mathrm{d}Q_\alpha + (H^* - H)\mathrm{d}t = \mathrm{d}F_1 \tag{5.8}$$

即可.

(5.6)式的左边,同时出现新老两组正则变量 p_α、q_α 和 P_α、Q_α,但这 $4s$ 个变量之间由于存在 $2s$ 个变换方程(5.2),因此独立的变量只有 $2s$ 个,我们可以利用(5.2)式消去其中任意 $2s$ 个不独立的变量. 对(5.8)式来说,由于等式左边的独立变量是新老正则坐标 q_α 和 Q_α,因此右边的函数 F_1 也应取 q_α 和 Q_α 为自己的独立变量,这样(5.8)式可更明确地表示为

$$\sum_\alpha p_\alpha \mathrm{d}q_\alpha - \sum_\alpha P_\alpha \mathrm{d}Q_\alpha + (H^* - H)\mathrm{d}t = \mathrm{d}F_1(q,Q,t), \tag{5.9}$$

这就是正则变换所应满足的具体条件. $F_1(q,Q,t)$ 称为**第一类正则变换母函数**.

由(5.9)式可得

$$p_\alpha = \frac{\partial F_1}{\partial q_\alpha}, P_\alpha = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_\alpha}, \ \alpha = 1,2,\cdots,s; \tag{5.10}$$

$$H^* = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \tag{5.11}$$

这两个式子表明,在从 p_α、q_α 变换到 P_α、Q_α 时,虽然新坐标 Q_α 可任意规定,但一旦 Q_α 规定以后,那么其他量就必须满足以下三点:第一,P_α 必须由 $P_\alpha = -\dfrac{\partial F_1}{\partial Q_\alpha}$ 来规定,即由 F_1 来决定,不同的 F_1 对应不同的 P_α;第二,F_1 不能完全自由选择,必须满足 $p_\alpha = \dfrac{\partial F_1}{\partial q_\alpha}$;第三,新的哈密顿函数 H^* 必须由(5.11)来确定. 如果违反这三点中的任意一点,那么经过(5.2)的变换后,(5.3)形式的正则方程一般不再成立.

我们还可把正则变换的关系式(5.9)改写为其他形式. 在某些情况下,我们不取新旧坐标 q_α 和 Q_α 为独立变量,而取老坐标 q_α 和新动量 P_α 为独立变量更方便些. 为此利用

$$\sum_{\alpha} P_{\alpha} \mathrm{d} Q_{\alpha} = \mathrm{d}\left(\sum_{\alpha} P_{\alpha} Q_{\alpha}\right) - \sum_{\alpha} Q_{\alpha} \mathrm{d} P_{\alpha},$$

可将(5.9)式改写为

$$\sum_{\alpha} p_{\alpha} \mathrm{d} q_{\alpha} + \sum_{\alpha} Q_{\alpha} \mathrm{d} P_{\alpha} + (H^{*} - H) \mathrm{d} t$$

$$= \mathrm{d}\left(F_{1} + \sum_{\alpha} P_{\alpha} Q_{\alpha}\right).$$

利用(5.2)可把上式右边写成为

$$\mathrm{d}\left(F_{1} + \sum_{\alpha} P_{\alpha} Q_{\alpha}\right) = \mathrm{d} F_{2}(q, P, t),$$

于是得

$$\sum_{\alpha} p_{\alpha} \mathrm{d} q_{\alpha} + \sum_{\alpha} Q_{\alpha} \mathrm{d} P_{\alpha} + (H^{*} - H) \mathrm{d} t = \mathrm{d} F_{2}(q, P, t). \tag{5.12}$$

由此得

$$p_{\alpha} = \frac{\partial F_{2}}{\partial q_{\alpha}}, Q_{\alpha} = \frac{\partial F_{2}}{\partial P_{\alpha}}, \ \alpha = 1,2,\cdots,s; \tag{5.13}$$

$$H^{*} = H + \frac{\partial F_{2}}{\partial t}. \tag{5.14}$$

$F_{2}(q, P, t)$称为**第二类正则变换母函数**.

类似地还可有第三类和第四类的正则变换式：

$$\sum_{\alpha}(-q_{\alpha} \mathrm{d} p_{\alpha} - P_{\alpha} \mathrm{d} Q_{\alpha}) + (H^{*} - H) \mathrm{d} t = \mathrm{d} F_{3}(p, Q, t), \tag{5.15}$$

$$\sum_{\alpha}(Q_{\alpha} \mathrm{d} P_{\alpha} - q_{\alpha} \mathrm{d} p_{\alpha}) + (H^{*} - H) \mathrm{d} t = \mathrm{d} F_{4}(p, P, t). \tag{5.16}$$

值得指出的是，所有这四种正则变换中，新旧哈密顿函数之间的变换关系都可以用同一种方式来表示：

$$H^{*} = H + \frac{\partial F_{i}}{\partial t}, \quad i = 1,2,3,4. \tag{5.17}$$

如果母函数不显含时间，$\frac{\partial F_{i}}{\partial t} = 0$，则 $H^{*} = H$，这时只要将 H 中的 p_{α}、q_{α} 用 P_{α}、Q_{α} 来代替即可得到新的哈密顿函数 H^{*}.

从上面的讨论中可知，通过正则变换可使新的正则变量 P_{α} 和 Q_{α} 中的每一个，既和原来的坐标 q_{α}，又和原来的动量 p_{α} 有关. 因此变换后的广义坐标 Q_{α} 已经没有纯粹空间坐标的意义了. 例如，如果我们取母函数

$$F_{1}(q, Q, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} Q_{\alpha}, \tag{5.18}$$

则由(5.9)得

$$p_\alpha = \frac{\partial F_1}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha, \; P_\alpha = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_\alpha} = -q_\alpha, \; \alpha = 1,2,\cdots,s.$$

这一变换仅使动量和坐标的名称互换. 因此在哈密顿方程中,广义坐标和广义动量只是名称上的不同,在物理意义上并无任何差别可言,因此常把它们称为**正则共轭变量**. 实际上任何一个力学量均可看作是正则变量,只要相应的共轭变量 p、q 的乘积有**作用量的量纲**即可,即

$$\dim pq = \dim 能量 \times \dim 时间.$$

在这样的意义下,能量 E 和时间 t 也可以看成是一对共轭的正则变量.

值得指出的是,普通意义下的坐标变换,是正则变换的一种特殊情况. 事实上如果我们取第二类正则变换的母函数

$$F_2 = \sum_\alpha f_\alpha(q_1, q_2, \cdots, q_s, t) P_\alpha, \tag{5.19}$$

则由(5.13)可得

$$Q_\alpha = \frac{\partial F_2}{\partial P_\alpha} = f_\alpha(q_1, \cdots, q_s, t).$$

这就是拉格朗日坐标变换(5.1),坐标的变换和动量不发生关系.

正则变换的重要意义在于可以简化新的哈密顿函数,使广义坐标尽可能地变为循环坐标. 在§2.7 中我们曾经指出,对于自由度为 s 的力学体系,必有 $2s-1$个独立的运动积分. 每个运动积分都可以认为有一个广义坐标与之相对应,因此原则上总可以使一个力学体系的所有广义坐标全部是循环坐标,从而使正则方程的求解大大简化. 下面我们举一个具体例子来说明确实是可能的.

【例】 用正则变换方法求平面谐振子的运动.

解:我们知道一维谐振子的哈密顿函数为

$$H = E = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2.$$

因此平面谐振子的哈密顿函数可写为

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2} m(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2). \tag{1}$$

这里我们取了直角坐标 x、y 为广义坐标,显然 x、y 都不是循环坐标,我们希望通过正则变换在将 x、y、p_x、p_y 变换为新的正则变量 Q_1、Q_2、P_1、P_2 后,使新的哈密顿函数 H^* 中不出现 Q_1、Q_2. 这样的变换归结为寻找适当的母函数. 究竟怎样来选取母函数才能使循环坐标增加呢? 这个问题我们留到以后再讨论,现在设已经找到了这样一个母函数

$$F_1(q, Q) = \frac{m}{2}(\omega_1 x^2 \cot Q_1 + \omega_2 y^2 \cot Q_2). \tag{2}$$

其中 Q_1 和 Q_2 为新的正则坐标. 将(2)代入(5.10)得

$$\begin{cases} p_x = \dfrac{\partial F_1}{\partial x} = m\omega_1 x\cot Q_1, \\ p_y = \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = m\omega_2 y\cot Q_2, \\ P_1 = -\dfrac{\partial F_1}{\partial Q_1} = \dfrac{m}{2}\omega_1 x^2\csc^2 Q_1, \\ P_2 = -\dfrac{\partial F_1}{\partial Q_2} = \dfrac{m}{2}\omega_2 y^2\csc^2 Q_2. \end{cases} \tag{3}$$

因所选的母函数不显含 t，所以 $H^* = H$. 因此将(3)代入(1)即得

$$\begin{aligned} H^* &= \frac{1}{2m}(m^2\omega_1^2x^2\cot^2 Q_1 + m^2\omega_2^2y^2\cot^2 Q_2) + \frac{m}{2}(\omega_1^2x^2 + \omega_2^2y^2) \\ &= \omega_1 P_1 + \omega_2 P_2. \end{aligned} \tag{4}$$

从而得到新的正则方程为

$$\begin{cases} \dot{Q}_1 = \dfrac{\partial H^*}{\partial P_1} = \omega_1, \\ \dot{P}_1 = -\dfrac{\partial H^*}{\partial Q_1} = 0, \\ \dot{Q}_2 = \dfrac{\partial H^*}{\partial P_2} = \omega_2, \\ \dot{P}_2 = -\dfrac{\partial H^*}{\partial Q_2} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

显然 Q_1 和 Q_2 都是循环坐标，积分后得

$$\begin{gathered} P_1 = C_1, \quad P_2 = C_2, \\ Q_1 = \omega_1 t + \delta_1, \quad Q_2 = \omega_2 t + \delta_2. \end{gathered} \tag{6}$$

其中 C_1、C_2、δ_1、δ_2 是四个积分常数. 将(6)代入(3)中的后面两个方程可解得

$$\begin{cases} x = \left(\dfrac{2C_1}{m\omega_1}\right)^{\frac{1}{2}}\sin(\omega_1 t + \delta_1), \\ y = \left(\dfrac{2C_2}{m\omega_2}\right)^{\frac{1}{2}}\sin(\omega_2 t + \delta_2). \end{cases} \tag{7}$$

这就是我们所需要的最后结果，并且可以看到，新的正则坐标是振子的相位，而新的动量则和振幅相联系.

§8.6 泊松括号

当我们用正则变量 p、q 来描述一个力学体系时，任何一个力学量 f 均可表示为 p、q、t 的函数：$f = f(p, q, t)$. 这些力学量，有的随时间变化，有的是运动积分，不随时间变化. 以前我们所讨论的中心问题之一是如何找循环坐标，亦即如何找运动积分. 现在我们提出一个反过来的问题：对于一个给定的力学体系，

如何来判断力学量 $f(p,q,t)$是否为运动积分？一个力学体系的性质可完全由它的哈密顿函数 H 决定．因为有了 H,就可以写出正则方程,解此正则方程即可得到此力学体系的一切力学性质．因此可以设想,力学量 $f(p,q,t)$是否为运动积分,一定可以从 f 和 H 的关系中作出判断．我们来具体分析一下这个问题．

写出 $f(p,q,t)$对时间 t 的全微商：

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{\alpha}\left[\frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}}\dot{q}_{\alpha}+\frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}}\dot{p}_{\alpha}\right]. \tag{6.1}$$

利用正则方程,将上式中的 $\dot{q}_{\alpha}$ 用$\frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}}$来代替,$\dot{p}_{\alpha}$ 用 $-\frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}}$来代替,则(6.1)式可写为

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{\alpha}\left[\frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}}\frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}}-\frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}}\frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}}\right]. \tag{6.2}$$

引入符号

$$[H,f]=\sum_{\alpha}\left[\frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}}\frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}}-\frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}}\frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}}\right], \tag{6.3}$$

则(6.2)式可简写为

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial t}+[H,f]. \tag{6.4}$$

方程(6.4)明显地给出了任意一个力学量 f 随时间的变化与哈密顿函数 H 的关系,称为 f 的**运动方程**．从这个方程可以看到,如果力学量 f 是运动积分,$\mathrm{d}f/\mathrm{d}t=0$,则

$$\frac{\partial f}{\partial t}+[H,f]=0, \tag{6.5}$$

特别是当 f 不显含时间 t 时,有

$$[H,f]=0. \tag{6.6}$$

(6.6)式和(6.5)式为我们提供了判断一个力学量 f 是否为运动积分的方便的办法．以前我们要判断一个力学量 f 是否为运动积分,一般需要先解出运动方程,得到 $q_{\alpha}=q_{\alpha}(t)$和 $p_{\alpha}=p_{\alpha}(t)$,然后把它们代入 $f(p,q,t)$中,才能看出 f 是否和时间无关．现在则可直接从 f 和 H 的关系判断 f 是否为运动积分．一个最简单的例子是：若 f 就是 H 本身,那么由(6.3)式,显然$[H,H]=0$,代入(6.5)得 H 为运动积分的条件是$\frac{\partial H}{\partial t}=0$,即得我们早已熟知的结论．下面举一个例子．

【例 1】 平面谐振子角动量的守恒性．

解：平面谐振子的哈密顿函数为

$$H=\frac{1}{2m}(p_x^2+y_y^2)+\frac{1}{2}m(\omega_1^2x^2+\omega_2^2y^2),$$

角动量为

$$\boldsymbol{L}=(xp_y-yp_x)\boldsymbol{k}.$$

因 L 不显含 t，因此 L 是否为运动积分，可由 $[H,L]$ 是否为零决定．由(6.3)式得

$$[H,L]=\left(\frac{\partial H}{\partial p_x}\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial p_x}\right)+\left(\frac{\partial H}{\partial p_y}\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial p_y}\right)$$
$$=mxy(\omega_2^2-\omega_1^2).$$

由此可知，当 $\omega_1=\omega_2$ 时，平面谐振子的角动量守恒；$\omega_1\neq\omega_2$ 时，角动量不守恒．这个结论显然是对的．因为谐振子的 $\omega^2=\frac{k}{m}$，当 $\omega_1=\omega_2$ 时，平面谐振子是在中心势场 $V=\frac{1}{2}kr^2$ 中运动的粒子，所以角动量守恒；当 $\omega_1\neq\omega_2$ 时，粒子在势场 $\frac{1}{2}(k_1x^2+k_2y^2)$ 中运动，它不是中心势场，所以粒子的角动量不守恒．

由(6.3)式所定义的符号 $[H,f]$ 称为力学量 f 和 H 所组成的**泊松**(Piosson)**括号**．与(6.3)式类似，一个力学体系的任意两个力学量 $f(p,q,t)$ 和 $g(p,q,t)$ 的泊松括号定义为：

$$[f,g]=\sum_\alpha\left(\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha}-\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha}\right).\tag{6.7}$$

也有人把泊松括号定义为

$$[f,g]=\sum_\alpha\left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha}\right).$$

这两种定义相差一个负号，只要前后一致，两种定义对下面的运算没有影响．我们采用(6.7)的定义．

利用泊松括号的定义，并考虑到

$$\begin{cases}\dfrac{\partial q_\alpha}{\partial q_\beta}=\delta_{\alpha\beta}, & \dfrac{\partial q_\alpha}{\partial p_\beta}=0,\\[2ex] \dfrac{\partial p_\alpha}{\partial p_\beta}=\delta_{\alpha\beta}, & \dfrac{\partial p_\alpha}{\partial q_\beta}=0,\end{cases}$$

可以把正则方程写成完全对称的形式：

$$\dot{q}_\alpha=[H,q_\alpha],\quad \dot{p}_\alpha=[H,p_\alpha].\tag{6.8}$$

泊松括号有下面一些性质：

(1) $[f,g]=-[g,f]$.　(6.9)

(2) 若 c 为常量，则 $[f,c]=0$.　(6.10)

(3) $[f_1+f_2,g]=[f_1,g]+[f_2,g]$.　(6.11)

(4) $[f_1f_2,g]=f_1[f_2,g]+f_2[f_1,g]$.　(6.12)

(5) $\dfrac{\partial}{\partial t}[f,g]=\left[\dfrac{\partial f}{\partial t},g\right]+\left[f,\dfrac{\partial g}{\partial t}\right]$.　(6.13)

(6) $[f,q_\alpha]=\dfrac{\partial f}{\partial p_\alpha}$; $[f,p_\alpha]=-\dfrac{\partial f}{\partial q_\alpha}$. (6.14)

(7) $[p_\alpha,p_\beta]=0$, $[q_\alpha,q_\beta]=0$, (6.15)

$[p_\alpha,q_\beta]=\delta_{\alpha\beta}$. (6.16)

以上这些性质可以根据泊松括号的定义直接得出,留作习题,请读者自己证明.下面还有一些性质,需要作一些说明或证明.

(8) 雅可比恒等式.设 f、g、h 是任意三个用正则变量表示的力学量,则成立:

$$[f,[g,h]]+[g,[h,f]]+[h,[f,g]]=0 \tag{6.17}$$

这个关系式称为雅可比恒等式,也留作习题请读者自己证明.

(9) 泊松括号在正则变换下保持不变,即

$$[f,g]_{p,q}=[f,g]_{P,Q}, \tag{6.18}$$

式中$[f,g]_{p,q}$表示以 p、q 为正则变量的力学量 f 和 g 的泊松括号.现在作正则变换 p、$q\to P$、Q,(6.18)式表示经过正则变换后力学量 f 和 g 的泊松括号仍旧和原来的相同.初看起来这似乎是理所当然的,但是稍细想一下,就会认识到这是泊松括号的一个很重要的性质,因为$[f,g]$是函数 f 和 g 对正则变量求导后所定义的一个新函数,正则变换不能保证任意一个函数在变换后保持不变.例如哈密顿函数,虽然变换前和变换后的定义不变,但新旧哈密顿函数之间的关系却是 $H^*(PQt)=H(pqt)+\dfrac{\partial F}{\partial t}$,也就是说正则变换并不能保证哈密顿函数保持不变.

(6.17)和(6.18)的证明从略.希望了解这两式证明的读者,可参阅金尚年编著的《经典力学》§10.2,复旦大学出版社(1987).

(10) 若 f 和 g 都是运动积分,则它们的泊松括号$[f,g]$也是运动积分.

泊松括号的这一性质称为泊松定理.证明如下:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f,g]=\frac{\partial}{\partial t}[f,g]+[H,[f,g]].$$

应用(6.4)和雅可比恒等式,上式可改写为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f,g]&=\left[\frac{\partial f}{\partial t},g\right]+\left[f,\frac{\partial g}{\partial t}\right]-[f,[g,H]]-[g,[H,f]]\\&=\left[\left(\frac{\partial f}{\partial t}+[H,f]\right),g\right]+\left[f,\left[\frac{\partial g}{\partial t}+[H,g]\right]\right]\\&=\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t},g\right]+\left[f,\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\right].\end{aligned}$$

如果 f 和 g 都是运动积分,则 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t=\mathrm{d}g/\mathrm{d}t=0$,因此由上式即得$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f,g]=0$,

所以$[f,g]$也是运动积分,这就证明了泊松定理.

泊松定理为我们提供了一条寻找运动积分的新途径. 如果我们已知两个运动积分,则可由它们所组成的泊松括号找到第三个运动积分.

【例 2】 已知一质点对 x 轴及 y 轴的角动量守恒,求证这个质点对 z 轴的角动量也守恒.

证: L_x 和 L_y 的表示式为

$$\begin{cases} L_x = m\dot{z}y - zm\dot{y}, \\ L_y = m\dot{x}z - xm\dot{z}. \end{cases} \tag{1}$$

令

$$\begin{cases} x,y,z \to q_1,q_2,q_3, \\ m\dot{x},m\dot{y},m\dot{z} \to p_1,p_2,p_3, \end{cases}$$

则(1)式可改写为

$$\begin{cases} L_x = f = p_3q_2 - q_3p_2, \\ L_y = g = p_1q_3 - q_1p_3. \end{cases} \tag{2}$$

作泊松括号

$$[f,g] = \left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial g}{\partial q_1} + \frac{\partial f}{\partial p_2}\frac{\partial g}{\partial q_2} + \frac{\partial f}{\partial p_3}\frac{\partial g}{\partial q_3}\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial g}{\partial p_1} + \frac{\partial f}{\partial q_2}\frac{\partial g}{\partial p_2} + \frac{\partial f}{\partial q_3}\frac{\partial g}{\partial p_3}\right). \tag{3}$$

将(2)代入(3)得

$$[f,g] = q_2p_1 - (-p_2)(-q_1) = -L_z,$$

即

$$[L_x,L_y] = -L_z \tag{4}$$

所以若 L_x 和 L_y 为运动积分,则由泊松定理,L_z 亦为运动积分.

需要指出的是,应用泊松定理不一定都能得到新的运动积分. 因为运动积分的总数是有限的,在许多情况下,由两个运动积分所作出的泊松括号是一个恒等式,或者等于常数,这就得不出新的运动积分了.

§8.7 哈密顿-雅可比方程

在§8.5中曾经指出,适当的正则变换可使新的哈密顿函数 $H^*(P,Q,t)$ 的结构简化,从而使正则方程易于求解. 最理想的情况是使 $H^*=0$,这时新的正则方程就变为

$$\begin{cases} \dot{P}_\alpha = 0, \\ \dot{Q}_\alpha = 0, \end{cases} \quad \alpha = 1,2,\cdots,s,$$

从而

$$\begin{cases} P_\alpha = \eta_\alpha = \text{常数}, \\ Q_\alpha = \xi_\alpha = \text{常数}, \end{cases} \alpha = 1,2,\cdots,s.$$

然后再利用变换关系

$$\begin{cases} P_\alpha = P_\alpha(q_1\cdots q_s;\ p_1\cdots p_s;t) = \eta_\alpha, \\ Q_\alpha = Q_\alpha(q_1\cdots q_s;\ p_1\cdots p_s;t) = \xi_\alpha, \end{cases} \alpha = 1,2,\cdots,s,$$

即可得到原来正则方程的解：

$$\begin{cases} p_\alpha = p_\alpha(\eta_1\cdots\eta_s;\ \xi_1\cdots\xi_s;t), \\ q_\alpha = q_\alpha(\eta_1\cdots\eta_s;\ \xi_1\cdots\xi_s;t), \end{cases} \alpha = 1,2,\cdots,s.$$

那么，使 $H^* = 0$ 的这种变换是否存在呢？如果存在，又怎样去寻找其母函数呢？

在§8.5中指出，有四类正则变换母函数 F，新旧哈密顿函数间的关系都是

$$H^*(P,Q,t) = H(p,q,t) + \frac{\partial F}{\partial t}.$$

欲使 $H^* = 0$，则要求母函数 F 满足关系式

$$H(p,q,t) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \tag{7.1}$$

现在我们取第二类母函数 $F = F_2(q,P,t)$，则由(5.13)式得

$$p_\alpha = \frac{\partial F}{\partial q_\alpha}, \tag{7.2}$$

将它代入(7.1)，并根据所设要求，令

$$P_\alpha = \eta_\alpha,$$

这样(7.1)就可表示为

$$H\left(q,\frac{\partial F}{\partial q},t\right) + \frac{\partial F(q,\eta,t)}{\partial t} = 0. \tag{7.3}$$

这是函数 $F(q_1,\cdots,q_s,t)$ 的一阶偏微分方程，η_α 可看成是这个方程积分后的一些独立的积分常数. 这表明只要求得方程(7.3)的解，并将它作为第二类正则变换的母函数，就可使 $H^* = 0$，从而得到正则方程的解. 也就是说，使 $H^* = 0$ 的正则变换是存在的，这种正则变换的母函数由方程(7.3)的解决定. 这就是我们的结论.

方程(7.3)中未知函数 F 都是以导数 $\frac{\partial F}{\partial q_\alpha}$、$\frac{\partial F}{\partial t}$ 的形式出现的. 因此如果 $F(q,t)$ 是方程的解，则

$$S(q,t) = F(q,t) + A \tag{7.4}$$

也是方程的解,其中 A 是任意常数. 因此我们可把方程(7.3)改写为

$$H\left(q,\frac{\partial S}{\partial q},t\right)+\frac{\partial S}{\partial t} = 0. \tag{7.5}$$

这个方程称为**哈密顿-雅可比方程**,函数 $S(q,t)$称为**哈密顿主函数**. 从数学上我们知道,一阶偏微分方程的完全解所含有的独立积分常数的数目和函数自变量的数目是相同的. 方程(7.5)中的函数 $S(q,t)$共有 $s+1$ 个自变量,其完全解有 $s+1$ 个独立常数. (7.4)式表示其中有一个常数是相加常数,其余 s 个常数就是$F(q,\eta,t)$中的 s 个 η_α.

需要指出的是,按照上述正则变换的思想来解正则方程,看来十分理想,但并不是没有困难的. 实际上这样做只不过是将解正则方程的困难转移到了解哈密顿-雅可比方程上去罢了. 但这一方法毕竟为我们指出了另一条解正则方程的途径,它具有重要的理论价值和实用价值.

现在我们来讨论一下哈密顿主函数 S 的物理意义. 因为 S 是 $q_1,q_2,\cdots,q_s,t$ 的函数,因此

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \sum_\alpha \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial S}{\partial t}. \tag{7.6}$$

由(7.2)、(7.3)和(7.4)得

$$\frac{\partial S}{\partial q_\alpha} = p_\alpha, \tag{7.7}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = - H. \tag{7.8}$$

将它们代入(7.6)式得

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \sum_\alpha p_\alpha \dot{q}_\alpha - H = L. \tag{7.9}$$

由此可得

$$S = \int L\mathrm{d}t. \tag{7.10}$$

在§8.4 中我们曾称 $\int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t$ 为哈密顿作用量. (7.10)式表明,哈密顿主函数 S 就是积分限不确定的哈密顿作用量,因此 S 又称为**哈密顿作用函数**.

下面我们转入讨论哈密顿-雅可比方程(7.5)的求解问题. 为简单起见,我们只讨论哈密顿函数 H 为常数E 时的哈密顿-雅可比方程的解,即能量守恒或广义能量守恒问题的求解,纯力学问题都属于这一类问题. 这种情况下方程(7.5)可表示为

$$\frac{\partial S(q,t)}{\partial t} + E = 0. \tag{7.11}$$

将上式对时间积分,并考虑到(7.4)式得

$$\begin{aligned} S(q,t) &= F(q,t) + A \\ &= -Et + W(q_1,\cdots,q_s) + A. \end{aligned} \tag{7.12}$$

式中 A 是相加常数,函数 W 称为**哈密顿特征函数**. 不难证明 W 实际上就是上限可变的莫培督作用量. 因为能量守恒时哈密顿主函数 $S(q,t)$ 由定义可直接表示为

$$\begin{aligned} S &= \int L\mathrm{d}t = \int\Big(\sum_\alpha p_\alpha \dot{q}_\alpha - H\Big)\mathrm{d}t \\ &= \int \sum_\alpha p_\alpha \mathrm{d}q_\alpha - E(t-t_0). \end{aligned}$$

将上式和(7.12)式比较,即可得

$$W(q_1,\cdots,q_2) = \int \sum_\alpha p_\alpha \mathrm{d}q_\alpha. \tag{7.13}$$

它的右边就是积分上限可变的莫培督作用量.

由(7.12)式和(7.7)式得

$$\frac{\partial S}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial W}{\partial q_\alpha} = p_\alpha. \tag{7.14}$$

将上式代入 $H=E$,得

$$H\left(q_1,\cdots,q_s;\frac{\partial W}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial W}{\partial q_s}\right) = E. \tag{7.15}$$

这是一个关于函数 W 的一阶偏微分方程,从这个方程中解得 W 后代入(7.12)式中即可得 H 为常数的体系的哈密顿-雅可比方程的解了.

下节再来讨论方程(7.15)如何求解. 现在假定方程(7.15)的解已经找到,研究一下这个解和我们感兴趣的正则方程的完全积分 $q_\alpha = q_\alpha(t)$、$p_\alpha = p_\alpha(t)$及体系的运动轨道的关系.

函数 W 是 s 个广义坐标的函数,因此方程(7.15)的解应该包含 s 个常数,但在(7.12)中我们已经把能量 E 作为一个独立常数,因此 W 的 s 个常数中有一个是 E,令这个常数是 η_1,这样就可以把方程(7.15)的解表示为

$$\begin{cases} W = W(q_1,q_2,\cdots,q_s;\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s), \\ \eta_1 = E. \end{cases} \tag{7.16}$$

将(7.16)式代入(7.12)式得

$$F(q_1,\cdots,q_s,t;\eta_1,\cdots,\eta_s) = -Et + W(q_1,\cdots,q_s,E,\eta_2,\cdots,\eta_s). \tag{7.17}$$

上面已经指出,如果把哈密顿-雅可比方程去掉相加常数后的解 $F(q_1,\cdots,q_s,t,E,\eta_2,\cdots,\eta_s)$取作为第二类正则变换的母函数 $F_2(q_1,\cdots,q_s,t,P_1,\cdots,P_s)$,

则新坐标 $Q_\alpha=\xi_\alpha$ 和新动量 $P_\alpha=\eta_\alpha$ 都是常数. 下面我们来论证,如果我们在(7.17)式中取

$$\begin{cases}\eta_\alpha = P_\alpha, \\ E = P_1,\end{cases} \alpha = 2,3,\cdots,s. \tag{7.18}$$

那么我们就可以把正则方程的完全积分和体系的轨道方程与函数 $W(q_1,\cdots,q_s,E,\eta_2,\cdots,\eta_s)$ 直接联系起来.

(1) 轨道方程

根据以上规定和第二类正则变换关系式 $Q_\alpha=\dfrac{\partial F_2}{\partial P_\alpha}$,得

$$\frac{\partial W}{\partial \eta_\alpha} = \xi_\alpha = \text{常数}, \alpha = 2,3,\cdots,s. \tag{7.19}$$

这 $s-1$ 个代数方程,联系着 s 个广义坐标 q_α,它们都不含时间,因此是体系的轨道方程. 例如开普勒问题,取 x、y、z 为广义坐标,函数 W 可表示为

$$W = W(x,y,z,E,\eta_2,\eta_3).$$

代入(7.19)得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial W}{\partial \eta_2} = f_2(x,y,z,E,\eta_2,\eta_3) = \xi_2 = \text{常数}, \\ \dfrac{\partial W}{\partial \eta_3} = f_3(x,y,z,E,\eta_2,\eta_3) = \xi_3 = \text{常数},\end{cases} \tag{7.20}$$

这是两个曲面方程,它们的交线就是粒子运动的轨道.

(2) 坐标变化规律 $q_\alpha=q_\alpha(t)$

利用$\dfrac{\partial F_2}{\partial P_1}=Q_1$ 得

$$\frac{\partial F}{\partial E} = \xi_1 = \text{常数}. \tag{7.21}$$

但由(7.17)式得

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial E} &= -t + \frac{\partial W}{\partial E} \\ &= -t + f_1(q_1,\cdots,q_s,E,\eta_2,\cdots,\eta_s).\end{aligned}$$

将上式代入(7.21)式,并考虑到常数 ξ_1 的量纲和时间 t 相同,因此可令 $\xi_1=-t_0$. 于是得

$$t - t_0 = \frac{\partial W}{\partial E} = f_1(q_1,\cdots,q_s;\ E,\eta_2,\cdots,\eta_s) \tag{7.22}$$

将(7.22)和(7.19)联立起来,共有 s 个代数方程,对 s 个广义坐标 q_α 求解可得

$$q_\alpha = q_\alpha(t;E,\eta_2,\eta_3,\cdots,\eta_s;\ t_0,\xi_2,\xi_3,\cdots,\xi_s),\ \alpha = 1,2,\cdots,s. \tag{7.23}$$

这就是坐标的运动规律，$E,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 和 $t_0,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 是 $2s$ 个独立的运动常数.

(3) 动量变化规律 $p_\alpha = p_\alpha(t)$

由(7.14)式直接可得

$$p_\alpha = \frac{\partial W}{\partial q_\alpha} = p_\alpha(q_1,\cdots,q_s,E,\eta_2,\cdots,\eta_s),\ \alpha = 1,2,\cdots,s, \tag{7.24}$$

再将(7.23)代入(7.24)，消去 q_α 即得

$$p_\alpha = p_\alpha(t;E,\eta_2,\eta_3,\cdots,\eta_s;t_0,\xi_2,\cdots,\xi_s),\ \alpha = 1,2,\cdots,s. \tag{7.25}$$

这就是动量的变化规律.

综上所述，对于 H 为常数的力学体系，只要我们得到了偏微分方程(7.15)的解 $W(q_1,\cdots,q_s,E,\eta_2,\cdots,\eta_s)$，则体系的运动轨道和正则坐标、正则动量的完全积分就全部决定了.

*§8.8 用哈密顿理论解开普勒问题

经典力学的牛顿理论，拉格朗日理论和哈密顿理论都是讨论如何写出一个力学体系的动力学方程的问题. 用牛顿方程和拉格朗日方程写动力学方程，在前面各章中已有许多范例，读者通过自己做习题，应该感到比较熟悉了. 但如何用哈密顿理论来写动力学方程，本章所举的例题还不多. 哈密顿理论的动力学方程有三种不同的形式：正则方程(2.5)，哈密顿原理(4.2)和哈密顿－雅可比方程(7.5). 在§8.2中我们已用正则方程写出了开普勒问题$\left(V = -\frac{\alpha}{r}\right)$的动力学方程，本节我们仍以这个问题为例，再用哈密顿原理和哈密顿－雅可比方程来建立它的动力学方程. 开普勒问题用牛顿动力学方程和拉格朗日方程也已作过充分讨论，读者不妨把它们联系起来作一比较，从中必定会有所启迪.

【例1】 用哈密顿原理建立开普勒问题的动力学方程

解： 开普勒问题的拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{\alpha}{r}, \tag{1}$$

根据哈密顿原理，它的动力学方程可由

$$\delta S = \delta\int_{t_1}^{t_2} L\,\mathrm{d}t = \delta\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{\alpha}{r}\right]\mathrm{d}t = 0 \tag{2}$$

给出. 根据哈密顿变分标符 δ 的性质，积分端点 t_1 和 t_2 时刻的函数值不变，变分为零，因此可将(2)中的变分算符和积分算符交换次序，得

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\delta\left[\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{\alpha}{r}\right]\mathrm{d}t$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[m(\dot{r}\delta\dot{r} + r\dot{\theta}^2\delta r + r^2\dot{\theta}\delta\dot{\theta}) - \frac{\alpha}{r^2}\delta r \right] \mathrm{d}t = 0. \tag{3}$$

因为

$$\int_{t_1}^{t_2} m\dot{r}\delta\dot{r} = \int_{t_1}^{t_2} m\dot{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta r)\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} m\dot{r}\mathrm{d}(\delta r)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}(m\dot{r}\delta r) - \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{r}\,\delta r \mathrm{d}t$$

$$= m\dot{r}\delta r\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{r}\,\delta r\mathrm{d}t = -\int_{t_1}^{t_2} m\ddot{r}\,\delta r\mathrm{d}t\ . \tag{4}$$

其中用到 $\delta r(t_1) = \delta r(t_2) = 0$ 的条件．类似地可得

$$\int_{t_1}^{t_2} mr^2\dot{\theta}\delta\dot{\theta}\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} mr^2\dot{\theta}\mathrm{d}(\delta\theta)$$

$$= mr^2\dot{\theta}\delta\theta\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} mr(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\delta\theta\mathrm{d}t$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2} m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})r\delta\theta\mathrm{d}t, \tag{5}$$

将(4)、(5)代入(3)可得

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(-m\ddot{r} + mr\dot{\theta}^2 - \frac{\alpha}{r^2} \right)\delta r - m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})r\delta\theta \right]\mathrm{d}t = 0\ . \tag{6}$$

由于 δr 和 $\delta\theta$ 都是任意的，要使上式恒成立，必须 δr 和 $\delta\theta$ 项的系数为零．由此可得

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + \dfrac{\alpha}{r^2} = 0, \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})r = 0\ , \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\dfrac{\alpha}{r^2}, \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0\ . \end{cases} \tag{7}$$

此即我们所熟知的开普勒问题的牛顿动力学方程．

【例2】 用哈密顿－雅可比方程解开普勒问题．

解： 开普勒问题能量守恒，其哈密顿－雅可比方程可取(7.15)的形式

$$H\left(g, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = E\ . \tag{1}$$

取平面极坐标，写出开普勒问题的哈密顿函数

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) - \frac{\alpha}{r}\ , \tag{2}$$

由(7.14)式，$p_r = \dfrac{\partial W(r,\theta)}{\partial r}$，$p_\theta = \dfrac{\partial W(r,\theta)}{\partial \theta}$，代入(2)和(1)得

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2\right] - \frac{\alpha}{r} = E, \tag{3}$$

此即开普勒问题的哈密顿－雅可比方程．求出方程(3)的解，代入

$$\begin{cases} p_r = \dfrac{\partial W(r,\theta)}{\partial r} = m\dot{r}, \\ p_\theta = \dfrac{\partial W(r,\theta)}{\partial \theta} = \dfrac{\dot{\theta}}{mr^2}, \end{cases} \tag{4}$$

即可得

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\dfrac{\alpha}{r^2}, \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0. \end{cases}$$

下面我们先来求方程(3)的解 $W(r,\theta)$，但不通过(4)来求轨道 $r=r(\theta)$ 和运动方程 $r=r(t)$、$\theta=\theta(t)$，而是通过(7.19)式直接求轨道方程，进而通过(7.22)来写出其运动方程 $r=r(t)$ 和 $\theta=\theta(t)$.

用 $2mr^2$ 乘(3)式两边，并移项得

$$-r^2\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + 2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)r^2 = \left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2, \tag{5}$$

对于上述这种形式的偏微分方程，可用分离变量法求解，即可令

$$W(r,\theta) = W_1(r) + W_2(\theta). \tag{6}$$

将(6)代入(5)得

$$-\left[\left(\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}r}\right)^2 + 2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)\right]r^2 = \left(\frac{\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}\theta}\right)^2. \tag{7}$$

上式左边只是 r 的函数，右边只是 θ 的函数，要使其对任意的 r、θ 都成立，只有当它们都等于同一个常量时才可能. 这个常量必为正值，因此把它用 J^2 来表示，由此可得

$$\left(\frac{\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = J^2, \tag{8}$$

$$-\left[\left(\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}r}\right)^2 + 2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)\right]r^2 = J^2. \tag{9}$$

积分(8)式得

$$W_2(\theta) = J\theta + A. \tag{10}$$

(9)式可改写为

$$\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}r} = \sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right) - \frac{J^2}{r^2}},$$

所以

$$W_1(r) = \int\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right) - \frac{J^2}{r^2}}\,\mathrm{d}r, \tag{11}$$

将(10)、(11)代入(6)，最后得方程(3)的解：

$$W(r,\theta) = \int\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right) - \frac{J^2}{r^2}}\,\mathrm{d}r + J\theta + A. \tag{12}$$

下面我们利用(12)直接求轨道方程. 将(12)代入(7.19)得

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial J} &= \frac{\partial}{\partial J}\int\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right) - \frac{J^2}{r^2}}\,\mathrm{d}r + \theta \\ &= \int\frac{-J}{r^2\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right) - \frac{J^2}{r^2}}}\,\mathrm{d}r + \theta = \theta_0.\end{aligned}$$

上式中的 θ_0 即为(7.19)式中的积分常数 η_2. 适当选取坐标原点,总可令 $\theta_0=0$. 于是得

$$\theta=\int\frac{J\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{J^2}{r^2}}}=\arccos\frac{\frac{J}{r}-\frac{m\alpha}{J}}{\sqrt{2mE+\frac{m^2\alpha^2}{J^2}}},\tag{13}$$

令 $p=\frac{J^2}{m\alpha}$, $e=\sqrt{1+\frac{2EJ^2}{m\alpha^2}}$,则(13)式可改写为

$$r=\frac{p}{1+e\cos\theta}.\tag{14}$$

这正是我们所熟悉的开普勒问题的轨道方程.

下面再用(7.12)式求运动方程 $r(t)$ 和 $\theta(t)$. 将(12)代入(7.22)式得

$$t-t_0=\frac{\partial W}{\partial E}=\int\frac{m\mathrm{d}r}{\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{J^2}{r^2}}}=\sqrt{\frac{m}{2|E|}}\int\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{-r^2+\frac{\alpha}{|E|}r-\frac{J^2}{2m|E|}}},\tag{15}$$

它就是在§3.3中所给出的开普勒问题的运动方程 $r=r(t)$ 的积分表示式. 再将(15)和(14)联立起来即可解得 $\theta=\theta(t)$.

至此,我们先后已用牛顿方程、拉格朗日方程、哈密顿正则方程、哈密顿原理和哈密顿-雅可比方程分别讨论了开普勒问题的求解方法. 如果说用牛顿方程和拉格朗日方程来解开普勒问题各有各的优点,那么用哈密顿理论的三种方法来解开普勒问题,读者可能难以体会到其优点何在,而会有一种"杀鸡用牛刀"的感觉,兜了一个圈子,最后仍旧回到牛顿方程和拉格朗日方程的出发点. 那么究竟为什么在学习了经典力学的牛顿理论和拉格朗日理论后,我们还要学习哈密顿理论? 这个问题我们留到下一章再作适当的回答,这里只能打个比喻:如果把哈密顿理论看作是一把"牛刀",那么用来"杀鸡",它确实不及常用的"菜刀"方便;但如果面临的是"宰猪"、"杀牛"问题,这时牛刀就比菜刀优越了. 例如对于开普勒问题来说,如果还需要考虑另一个星体的微扰,这时哈密顿-雅可比方程就大有用处了,但这是一个三体问题,已超出了本课程的要求.

习 题

8.1 写出自由质点在柱坐标和球坐标中的哈密顿函数.

8.2 写出复摆的哈密顿函数和正则方程.

8.3 质量为 m 的质点在重力场中沿铅直线运动,设阻力和速度的平方成正比,写出质点的哈密顿方程.

8.4 假定在两个固定点 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2) 之间作一条曲线,并让它绕 y 轴旋转而形成一个旋转曲面,求使此旋转曲面的表面积为极小的曲线方程式.

8.5 曲面上两点之间路程为极小值的曲线叫短程线. 证明球表面的短程线为大圆(以球心为圆心的圆).

8.6 由哈密顿原理导出拉格朗日方程.

8.7 证明下列变换是正则变换:(1) $Q=\ln\left(\frac{1}{q}\sin p\right)$, $p=q\cot p$; (2) $Q=\arctan\frac{\alpha q}{p}$, $P=\frac{\alpha q^2}{2}\left(1+\frac{p^2}{\alpha^2 q^2}\right)$;(3) $Q=\ln(1+\sqrt{q}\cos p)$, $P=2(1+\sqrt{q}\cos p)\sqrt{q}\sin p$;(4) $Q_1=q_1$, $P_1=p_1$, $Q_2=p_2$, $P_2=-q_2$;(5) $Q=p+\mathrm{i}\alpha q$, $P=-\frac{1}{2}\left(q+\mathrm{i}\frac{p}{\alpha}\right)$.

8.8 质量为 m 的质点在重力场中自由落下. 试利用正则变换母函数 $F_1(y,\theta)=-mg\left(\frac{g}{6}\theta^3+y\theta\right)$写出新的哈密顿函数和正则方程,并求其解.

8.9 利用力学量 $f(p,q,t)$的运动方程$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial t}+[H,f]$,证明开普勒问题的角动量 $\boldsymbol{L}$,能量 E 和龙格-楞次(Runge-Lenz)矢量 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{L}-\frac{\alpha\boldsymbol{r}}{r}$都是守恒量.

8.10 证明 $q=\sqrt{\frac{2Q}{k}}\cos P$, $p=\sqrt{2kQ}\sin P$(k 为常数)是一正则变换. 若原来的哈密顿函数为 $H=\frac{1}{2}(p^2+k^2q^2)$,求用新正则变量表示的正则方程.

8.11 若新旧正则变量的变换关系为

$$Q=q^{\alpha}\cos\beta p,\quad P=q^{\alpha}\sin\beta p,$$

问 α、β 为何值时,这个变换是正则变换? 并找出其母函数.

8.12 质量为 m 的粒子在圆柱对称的势场中运动,对称轴为 z 轴,作变换

$$X=x\cos\omega t+y\sin\omega t,$$
$$Y=-x\sin\omega t+y\cos\omega t,$$
$$Z=z.$$

证明这是一个正则变换,写出此变换的母函数和新的哈密顿函数,并讨论其物理意义.

8.13 用球坐标写出球摆的哈密顿正则方程,并用这组正则变量计算下列泊松括号:

$$[L_x,L_y],\ [L_y,L_z],\ [L_z,L_x].$$

8.14 如果 φ 是坐标和动量的任意标量函数,试证明

$$[\varphi,L_z]=0.$$

8.15 用哈密顿-雅可比方程求抛射体在真空中运行的轨道.

8.16 用哈密顿-雅可比方程解平面谐振子问题.

* **8.17** 用哈密顿-雅可比方程求拉格朗日陀螺的解.

* **8.18** 质量为 m 的质点沿平面轨道运动,质点受到指向固定点的径向力 $F_r=-kr$ 的吸引,其中 k 是常数. 试采用极坐标和哈密顿-雅可比方程解出 $r(t)$. 假定初始条件为 $\dot{r}(0)=0$, $r(0)=r_{\max}$.

**第九章　哈密顿理论在物理学中的应用

经典力学的拉格朗日－哈密顿理论在物理学中有广泛的应用，本章讨论这方面的几个应用：电磁场理论的拉格朗日方程形式，薛定谔波动方程的建立，统计物理学中的刘维尔定理．通过对这些问题的讨论，既可加深对经典力学哈密顿理论的理解，同时也为后继的电动力学、量子力学和统计物理课准备了必要的理论基础．本章最后还将对经典力学的微扰理论作简单的介绍，它是一种求近似解的有效理论工具．

§9.1　连续体系的拉格朗日方程

本书前面各章所讨论的物体，只限于由质点和刚体所组成的分立的力学体系．电磁场是一个连续体系，如果我们要把电磁理论纳入经典力学的框架内，首先应从建立连续体系的经典力学方程着手．本节我们将用哈密顿原理来建立起适用于一般连续体系的拉格朗日方程，下一节再利用它来建立电磁场的拉格朗日方程．

为论述简单起见，我们先以一维弹性棒的纵振动为例，运用拉格朗日－哈密顿方法，写出它的拉格朗日函数，然后作推广，写出一般连续体系拉格朗日函数 L 的表示形式．有了拉格朗日函数 L，再用哈密顿原理来导出其动力学方程——连续体系的拉格朗日方程．

我们先采用§6.6一维晶格振动所用的模型，将一维均匀弹性棒看成是由排列在一条直线上的、质量均为 m、固有间隔为 a、彼此间由劲度系数为 k 的弹簧联系着的质点系（见图6.7），写出其拉格朗日函数．然后利用从分离到连续的极限过渡，得出连续体系的拉格朗日函数．设 η_i 是第 i 个质点偏离平衡位置的位移，则体系的动能为

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m\dot{\eta}_i^2 .$$

第 i 个质点所受到的力为

$$F_i = k(\eta_{i+1} - \eta_i) - k(\eta_i - \eta_{i-1}).$$

由此可推知体系的势能为

$$V = \frac{1}{2}\sum_i k(\eta_{i+1} - \eta_i)^2 .$$

于是体系的拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2}\sum_i \left[m\dot{\eta}_i^2 - k(\eta_{i+1} - \eta_i)^2 \right]. \tag{1.1}$$

下面我们就用取极限的方法，把(1.1)所示的分离体系的拉格朗日函数过渡为连续体系

的拉格朗日函数. 为此将(1.1)式改写为

$$L = \frac{1}{2}\sum_i a\left[\frac{m}{a}\dot{\eta}_i^2 - ka\left(\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{a}\right)^2\right] = \sum_i aL_i. \tag{1.2}$$

令弹性棒单位长度的质量为 l_l,则取极限时有

$$\frac{m}{a}\to l_l,\quad a\to \mathrm{d}x. \tag{1.3}$$

弹性棒的形变和应力的关系由**胡克定律**

$$F = E\xi \tag{1.4}$$

给出,其中 E 为材料的弹性模量,ξ 为单位棒长的伸长,

$$\xi = \frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{a}. \tag{1.5}$$

而分离体系的胡克定律为

$$F = k(\eta_{i+1}-\eta_i) = ka\,\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{a}. \tag{1.6}$$

将(1.5)代入(1.4)并和(1.6)比较,可知取极限时还有

$$ka\to E,\ \frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{a}\to\frac{\partial\eta}{\partial x}. \tag{1.7}$$

由(1.3)和(1.7),并考虑到 $\sum_i a\to\int\mathrm{d}x$,就可以把(1.2)从分离体系过渡到连续体系,从而得到弹性棒的拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2}\int\left[l_l\dot{\eta}^2 - E\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x \tag{1.8}$$

或

$$L = \int\mathscr{L}\,\mathrm{d}x, \tag{1.9}$$

其中

$$\mathscr{L} = \mathscr{T} - \mathscr{V} = \frac{1}{2}l_l\dot{\eta}^2 - \frac{1}{2}E\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 \tag{1.10}$$

称为**体系的拉格朗日密度**,它是(1.2)式中 L_i 的极限式,而 $\mathscr{T}$ 和 $\mathscr{V}$ 分别称为体系的**动能密度**和**势能密度**.

从上面的讨论中可以看出,连续体系的位置坐标 x 在拉格朗日函数中并不是广义坐标,而是代替分离体系中的求和指标 i. 对于每一个 x,$\eta(x)$是广义坐标,由于 η 亦随时间 t 改变,因此正确写法是 $\eta(x,t)$. 其中 x 和 t 都是拉格朗日函数的参数. 对于三维的连续体系,广义坐标应表示为 $\eta(x,y,z,t)$或 $\eta(x_1,x_2,x_3,t)$,而体系的拉格朗日函数应表示为

$$L = \iiint\mathscr{L}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3. \tag{1.11}$$

现在我们应用哈密顿原理来导出连续体系的拉格朗日方程. 对于弹性棒,拉格朗日密度只是 $\dot{\eta}=\partial\eta/\partial t$ 和$\partial\eta/\partial x$ 的函数,而 x 和 t 是参数. 在某些问题中 $\mathscr{L}$ 还可以是 η 或 x、t 的显函数. 因此三维空间拉格朗日密度的一般形式是

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x_j},\frac{\partial\eta}{\partial t},\eta,x_j,t\right),\quad j=1,2,3. \tag{1.12}$$

由哈密顿原理,体系的拉格朗日方程由下式给出:

$$\delta S = \delta\iiiint_1^2 \mathscr{L}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}t = 0. \tag{1.13}$$

现在的变分运算和以前的不同之处是:以前是对 x_1、x_2、x_3 变更的,现在 x_1、x_2、x_3 和 t 一样都是不变更的;不但 $\delta t = 0$ 而且 $\delta x_j = 0$. 所以时间积分上下限不变,空间积分的区域也不变. 现在的变分只是对 η 而言的,因此

$$\delta\mathscr{L} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta}\delta\eta + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\eta}}\delta\dot{\eta} + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\mathscr{L}}{\dfrac{\partial\eta}{\partial x_j}}\delta\left(\frac{\partial\eta}{\partial x_j}\right).$$

将它代入(1.13)得

$$\iiiint_1^2\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta}\delta\eta + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\eta}}\delta\dot{\eta} + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\mathscr{L}}{\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x_j}\right)}\delta\left(\frac{\partial\eta}{\partial x_j}\right)\right]\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}t = 0. \tag{1.14}$$

对上式第二项进行分部积分. 因 $\delta\eta_1 = \delta\eta_2 = 0$,所以

$$\int_1^2\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\eta}}\delta\dot{\eta}\mathrm{d}t = -\int_1^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\eta}}\right)\delta\eta\mathrm{d}t. \tag{1.15}$$

将(5.14)的第三项交换 δ 和$\partial/\partial x_j$ 的次序,再用分部积分,得

$$\int_1^2\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x_j}\right)}\delta\left(\frac{\partial\eta}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}x_j = -\int\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_j}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x_j}\right)}\right]\delta\eta\mathrm{d}x_j. \tag{1.16}$$

这里需要作一点说明,积分过程中已将偏导数$\dfrac{\partial}{\partial x_j}$换成了全导数$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_j}$,这是因为 η 是 x_1、x_2、x_3 和 t 的函数,在(1.14)中对 x_j 求导数,对时间 t 和其他两个空间坐标不求导,因此,我们使用了偏导数记号$\dfrac{\partial}{\partial x_j}$. 在上式的最后结果中,对 x_j 求导的意义仍一样,但由于 $\mathscr{L}$ 一般是 $\dfrac{\partial\eta}{\partial x_j}$、$\dfrac{\partial\eta}{\partial t}$、$\eta$、$x_j$ 和 t 的函数,不但当 $\mathscr{L}$ 显含 x_j 时,对 x_j 要求导,而且还应通过 η 对 x_j 求导. 因此我们改用了全导数记号$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_j}$. (1.15)式的推导过程中将$\partial/\partial t$ 换成 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ 也是同样的理由.

将(1.15)和(1.16)代入(1.14)得

$$\iiiint_1^2\delta\eta\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\eta}} - \sum_{j=1}^{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_j}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x_j}\right)}\right]\right]\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}t = 0. \tag{1.17}$$

由于 $\delta\eta$ 是任意的,要使上式恒为零,必须 $\delta\eta$ 的系数为零,即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\eta}} + \sum_{j=1}^{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_j}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x_j}\right)}\right] - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta} = 0. \tag{1.18}$$

这就是**连续体系的拉格朗日方程**.

对于分离的力学体系,我们知道 n 个自由度的体系共有 n 个拉格朗日方程. 连续体系的自由度有无限多,怎么只得到(1.18)一个拉格朗日方程呢? 这是因为,若把运动方程看作是坐标对时间的微分方程,则对每一个 x_j,(1.18)就可给出一个方程式,这样方程式就有无限

多个了. 现在我们是将 x_j 作为连续变量来看待的,因此(1.18)式仅为一个 η 对变数 x_1、x_2、x_3 和 t 的偏微分方程.

上面我们所考虑的连续体系只有一个位移 η,有些复杂的力学体系,例如三维弹性体,可能在 x_1、x_2、x_3 三个方向都有位移,因而就有三种广义坐标,其中每一个都是 x_1、x_2、x_3 和 t 的函数,我们可用 $\eta_k(x_1,x_2,x_3,t)(k=1,2,3)$来表示. 所以对更一般的连续力学体系,拉格朗日方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\eta}_k}+\sum_{j=1}^{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_j}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta_k}{\partial x_j}\right)}\right]-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta_k}=0,\quad k=1,2,\cdots \tag{1.19}$$

【例】 弹性棒纵振动的运动方程.

解: 弹性棒的拉格朗日密度已由(1.10)式给出.

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}l_l\dot{\eta}^2-\frac{1}{2}E\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2. \tag{1}$$

因此得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\eta}}=l_l\dot{\eta},\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\eta}}=l_l\dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2},\\ \dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)}=-E\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right),\quad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)}\right]=-E\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x^2},\\ \dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta}=0.\end{cases} \tag{2}$$

将(2)代拉格朗日方程(1.18)即得

$$l_l\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}-E\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}=0. \tag{3}$$

这就是弹性棒作纵振动的运动方程,这是一个波动方程,波速

$$v=\sqrt{\frac{E}{l_l}}. \tag{4}$$

§9.2 电磁场的拉格朗日方程

真空中的电磁场的运动规律由麦克斯韦方程给出:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=0; \tag{2.1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0},\quad \nabla\times\boldsymbol{B}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\mu_0\boldsymbol{j}. \tag{2.2}$$

要将麦克斯韦方程纳入拉格朗日方程的形式,应该取那些量作为体系的广义坐标呢? (2.1)和(2.2)中的 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 共有 6 个分量, §2.5 中已指出这 6 个分量并非彼此独立,因此不适合取为广义坐标,而应该取**矢势** $\boldsymbol{A}$ 和**标势** φ 作为广义坐标. $\boldsymbol{A}$、φ 与 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{E}$ 的关系可由(2.1)的两个方程及恒等式 $\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}=0$ 和 $\nabla\times\nabla\varphi=0$ 给出:

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}, \tag{2.3}$$

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}. \tag{2.4}$$

因此当用 $\boldsymbol{A}$ 和 φ 来描述电磁场的运动时,(2.2)才是场的运动方程,而(2.1)只不过是给出 $\boldsymbol{A}$ 和 φ 的定义而已.

如果能给出一个适当的拉格朗日密度 $\mathscr{L}$,利用拉格朗日方程(1.19)就可以导出电磁场的运动方程(2.2),那么就把电磁场的运动方程纳入到拉格朗日方程的理论体系中去了. 下面我们来证明这是可能的.

令

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0E^2-\frac{B^2}{\mu_0}\right)-\rho\varphi+\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}. \tag{2.5}$$

上式中的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 要通过(2.3)和(2.4)由 $\boldsymbol{A}$ 和 φ 来表示.

先考虑广义坐标 φ 所对应的拉格朗日方程. 在(2.5)中,φ 本身只出现在 $-\rho\varphi$ 这一项中,而 $\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}$ 只出现在 E^2 中,其他两项均与 φ 无关,因此

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi}=-\rho,$$

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)}=\varepsilon_0E_k\frac{\partial E_k}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)}=-\varepsilon_0E_k,$$

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}}=0.$$

代入拉格朗日方程(1.19)中,得

$$-\varepsilon_0\sum_k\frac{\partial E_k}{\partial x_k}+\rho=0. \tag{2.6}$$

将上式写成矢量形式就是(2.2)中的第一个方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

其次讨论广义坐标 A_1 所对应的拉格朗日方程. 在(2.5)中,A_1 本身出现在 $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}$ 项中,$\dot{A}_1$ 出现在 E^2 中,$\frac{\partial A_1}{\partial x_j}$ 出现在 B^2 中,因此得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_1}=j_1,\\[2mm]\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}_1}=\varepsilon_0E_1\dfrac{\partial E_1}{\partial\dot{A}_1}=-\varepsilon_0E_1,\\[2mm]\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right)}=-\dfrac{1}{\mu_0}B_3\dfrac{\partial B_3}{\partial\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right)}=\dfrac{B_3}{\mu_0},\\[2mm]\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3}\right)}=-\dfrac{B_2}{\mu_0}.\end{cases}$$

代入拉格朗日方程(1.19)得

$$\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial B_3}{\partial x_2}-\frac{\partial B_2}{\partial x_3}\right)-\varepsilon_0\frac{\partial E_1}{\partial t}-j_1=0. \tag{2.7}$$

类似可得

$$\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial B_1}{\partial x_3}-\frac{\partial B_3}{\partial x_1}\right)-\varepsilon_0\frac{\partial E_2}{\partial t}-j_2=0, \tag{2.8}$$

$$\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial B_2}{\partial x_1}-\frac{\partial B_1}{\partial x_2}\right)-\varepsilon_0\frac{\partial E_3}{\partial t}-j_3=0. \tag{2.9}$$

将它们合起来写成矢量形式即得(2.2)中的第二个方程

$$\nabla\times\boldsymbol{B}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\mu_0\boldsymbol{j}.$$

这就证明了电磁场的运动方程确实可以纳入到拉格朗日方程的理论体系中去. 对其他形式的场也同样可以做到.

将场方程纳入拉格朗日方程的形式,表明经典力学所发展起来的拉格朗日方程和哈密顿正则方程的理论体系,也适用于物质的其他运动形式. 这一理论具有高度的普遍性,它不仅可以作为力学,而且可以作为整个物理学的理论基础.

最后我们要说一下电磁场的拉格朗日密度(2.5)式是怎样得来的. 我们已多次说过,一个力学体系的拉格朗日函数不是唯一的. 因此对于连续体系来说,相应的拉格朗日密度 $\mathscr{L}$ 也不是唯一的,可以有许多个. 我们可以把(2.5)式看作是电磁场拉格朗日密度 $\mathscr{L}$ 的许多表示式之一. 在各种等价的拉格朗日密度之间,习惯上我们总是取结构最简单的一种形式. 有了这样的认识,如果我们不知道一个物理体系的拉格朗日密度应该怎么写,就可以去“猜”,去“凑”,作“假设”. 当然不能瞎猜乱凑,而是要符合一定的原则. 对于电磁场来说,理所当然其拉格朗日密度中一定包含场量,即 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{A}$、φ 一定要出现在 $\mathscr{L}$ 中;并且由于电荷和电流是激发电磁场的源头,因此 $\mathscr{L}$ 中也必定包含电荷密度 ρ 和电流密度 $\boldsymbol{j}$. 其次,拉格朗日密度必须是一个标量,其量纲应为能量密度. 根据这两条原则,我们去找电磁场的拉格朗日密度就归结为这样一个问题:如何由 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{A}$、φ 及 ρ、$\boldsymbol{j}$ 构造出一个量纲为能量密度的物理量出来. 每个读者都有能力做到这一点. 这样凑合出来的拉格朗日密度是否正确,需要进行“检验”,检验的方法就是把它代入方程(1.19)中,然后解这个方程. 如果所得出的结论与已知的理论和实验符合,那么就可以认为这个拉格朗日密度找对了;否则再换一个 $\mathscr{L}$ 作检验,直到成功为止. 如果同时有几个不同结构的 $\mathscr{L}$ 都得到正确的结果,那么我们总是取其中最简单的那个 $\mathscr{L}$ 作为正确的拉格朗日密度. 电磁场的拉格朗日密度(2.5)式正是这样确定的.

对于电磁场,我们已充分了解其运动规律,所以把麦克斯韦方程写成拉格朗日方程形式并无多大实际意义,但它有力地表明了物理世界的统一性:力学运动和电磁运动具有完全相同的运动规律. 这就启示我们:如果我们要研究某个未知领域的物理问题,例如微观粒子间的相互作用,我们可以认为(1.19)就是其正确的动力学方程,再根据一些必要的原则去构造一些拉格朗日密度,然后解方程,将其结果与已有的实验对照,或预言新的实验. 如果最后得到了实验证实,那么这个原来未知领域的正确理论就建立起来了. 所以经典力学的拉格朗日-哈密顿理论是我们探索未知物理世界的一个有力的理论工具.

§9.3 薛定谔波动力学方程的建立

非相对论量子力学有三种不同的理论形式,它们正好和经典力学哈密顿理论的三种不同

形式的动力学方程一一对应：1925 年 10 月海森伯(W. K. Heisenberg, 1901—1976)创建的通常被称为矩阵力学的量子力学，经狄拉克(P. A. M. Dirac, 1902—1984)研究，发现它可表示为用量子泊松括号表示的正则方程的形式；独立于海森伯，1926 年 3 月薛定谔(E. Schrödinger, 1887—1961)所建立的量子力学的波动方程则是直接从哈密顿-雅可比方程过渡而来的；1948—1950 年，狄拉克和费米(E. Fermi, 1901—1954)所建立的路径积分形式的量子力学，则与哈密顿原理的形式类似. 这种形式上的一一对应关系是否有其更深层次的意义不属于本书讨论的范围，但量子力学与经典力学之间存在某种形式上的过渡关系，这是不能否定的. 当然在过渡的过程中需要引入一些新的假设. 以玻尔(N. Bohr, 1885—1962)、海森伯、玻恩(M. Born, 1882—1970)等为一方，以爱因斯坦(A. Einstein, 1879—1955)、德布罗意(L. de Broglie, 1892—1987)、薛定谔等为另一方，他们创建并完善量子力学理论所遵循的路线和引入的假设是不一样的，但所得的数学方程完全等价. 用经典力学的术语来说，就是可以通过正则变换将一种理论形式变换为另一种理论形式. 正统量子力学是按玻尔-海森伯-玻恩的思想理论作出解释的. 本节并不立足于这条路线，而是根据薛定谔的原意，介绍他是如何利用经典力学的思想理论建立量子力学的基本方程——薛定谔方程的.

薛定谔的波动力学是他在 1926 年陆续发表的四篇题为《量子化是本征值问题》的论文中建立起来的. 第一篇论文讨论氢原子的波动力学方程. 如果我们完全站在经典力学的立场上，不引入任何新的假设，那么氢原子问题就是我们已经多次讨论过的开普勒问题，它的结论与氢原子的实际情况不符. 薛定谔为氢原子引入了一个假说：电子像光一样具有波粒二象性. 这个假设并非薛定谔所首创，它是德布罗意于 1924 年在其博士论文中正式提出来的，开始时薛定谔并不理解，经爱因斯坦从中解释才最后接受了德布罗意的观点. 下面我们就来介绍薛定谔建立波动力学的第一篇论文的基本内容：用经典力学的哈密顿理论，加上电子具有波粒二象性的假设，以氢原子为实例，建立普适的定态波动力学方程. 所谓定态就是指能量守恒的量子体系.

薛定谔先从哈密顿-雅可比方程着手，对于氢原子，其哈密顿函数为

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_x^2+p_y^2+p_z^2\right)-\frac{e^2}{r},$$

因此由第八章(7.15)，氢原子的哈密顿-雅可比方程为

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right]-\frac{e^2}{r}=E, \tag{3.1}$$

式中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，e 为电子电荷，$W=W(x,y,z)$，是经典哈密顿作用函数. 薛定谔对函数 W 作了一个变换：

$$W=\hbar\lg\psi, \tag{3.2}$$

式中 $\hbar$ 是一个常量. 由于 $\lg\psi$ 不带量纲，因此 $\hbar$ 具有与作用函数 W 相同的量纲，即作用量的量纲. 由(3.2)得

$$\frac{\partial W}{\partial x}=\frac{\hbar}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad \frac{\partial W}{\partial y}=\frac{\hbar}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \frac{\partial W}{\partial z}=\frac{\hbar}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial z}.$$

代入(3.1)经整理后得

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2-\frac{2m}{\hbar^2}\left(E+\frac{e^2}{r}\right)\psi^2=0. \tag{3.3}$$

(3.1)、(3.2)、(3.3)式完全是经典的，没有附加任何量子假设．也就是说(3.3)式就是氢原子的经典哈密顿－雅可比方程．

现在我们假设电子不是一个经典粒子，具有波粒二象性．这种粒子的运动规律我们并不知道，如何用经典力学的方法来寻求其运动方程呢？我们不妨借鉴上节建立电磁场拉格朗日方程的经验，把电子看作是像电磁波那样的“物质波”，假设一个适当的拉格朗日密度，用最小作用量原理来导出电子的波动力学方程．薛定谔的具体做法是，取

$$\mathrm{d}J = \delta\iiint_1^2 F(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0, \tag{3.4}$$

他认为凡是具有波粒二象性的非经典粒子，均可由(3.4)式导出其动力学方程．对(3.4)式我们可以作两种理解，一种是把(3.4)式看作是莫培督最小作用量原理，它是和时间无关的，$F(x,y,z)$就是莫培督作用函数；另一种是把(3.4)式看作是由哈密顿原理变形而来．哈密顿原理为$\delta s = \delta\int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t = 0$，根据变分算符$\delta$的定义，上式中的变分运算和积分运算可以交换，因此得$\int_{t_1}^{t_2}\delta L\mathrm{d}t = 0$．要使此式恒成立，可取$\delta L = 0$，亦即

$$\delta L = \delta\iiint_1^2 \mathscr{L}(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0,$$

这就是(3.4)式．作这样的理解，(3.4)式中的函数$F(x,y,z)$就是电子的拉格朗日密度．

现在我们来讨论如何选取(3.4)式中的被积函数$F(x,y,z)$．薛定谔把电子看作是一种“物质波”才得出(3.4)，对于波动，有一个普遍适用的结论：体系的平均动能$\mathscr{T}$恒等于平均势能$\mathscr{V}$．因此如果我们把(3.4)中$F(x,y,z)$看作是电子波的拉格朗日密度，那么由于$\mathscr{L}=\mathscr{T}-\mathscr{V}=0$，所以$F(x,y,z)$应是一个恒等于零的函数．这是仅仅考虑电子具有波动性所得的结果．现在我们再来考虑电子同时具有粒子性．上面我们已经指出，把氢原子中的电子看作一个纯经典粒子，它的哈密顿－雅可比方程就是(3.3)式，这是一个恒等于零的表示式．因此要把波粒二象性结合起来，最自然的选择是取(3.3)式作为(3.4)中的被积函数$F(x,y,z)$，即

$$\delta J = \delta\iiint_1^2\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2-\frac{2m}{\hbar^2}\left(E+\frac{e^2}{r}\right)\psi^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0. \tag{3.5}$$

这就是薛定谔所给出的氢原子中电子的波动力学方程．通过常规的数学运算(这里从略)，由(3.5)式可得

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi-\frac{e^2}{r}\psi=E\psi \tag{3.6}$$

和

$$\iint_f \mathrm{d}f\delta\psi\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0. \tag{3.7}$$

(3.7)是一个面积分为零的表示式，f是包围氢原子的一个封闭曲面，n为这个曲面的法线方向．由于$\delta\psi$是任意的，因此要使(3.7)式恒成立，可取这样的条件：当曲面f取得足够大时，在这个曲面上$\psi=0$和$\frac{\partial\psi}{\partial n}=0$，它们可以看作是解偏微分方程(3.6)的一组边界条件．

方程(3.6)可改写为

$$\hat{H}\psi = E\psi \ , \tag{3.8}$$

其中

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)-\frac{e^2}{r}\\ &= -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V.\end{aligned} \tag{3.9}$$

$\hat{H}$ 称为哈密顿算符,可由经典哈密顿函数 $H=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+V$ 中的动量改换为微分标符

$$p \rightarrow \hat{p} = -\mathrm{i}\hbar\nabla \tag{3.10}$$

得到. 方程(3.8)和对应关系(3.10)具有普遍性,不仅对于氢原子,而且对于任意的 $H=E$ 的保守体系都适用.

数学上像(3.8)这样形式的微分方程,即一个微分算符 $\hat{A}$ 作用到一个函数 ψ 上,等于一个常数乘上此函数,$\hat{A}\psi=a\psi$,称为本征值问题. 常数 a 称为算符 $\hat{A}$ 的本征值,相应的 ψ 称为本征函数,在给定的边界条件下,一般情况只有当 a 取某些特殊值的时候,本征值方程才有解. 定态薛定谔方程(3.8)就是一个能量本征值方程.

在边界条件(3.7)下解方程(3.8)得氢原子的能量本征值为

$$E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2}, \quad n=1,2,\cdots \tag{3.11}$$

它就是 1913 年玻尔用定态跃迁假设所得出的氢原子的能级公式,海森伯的矩阵力学也可得到这个公式. 这个能级公式当时已得到实验的充分证实. 薛定谔得到了这个公式,表明他的工作取得了成功,创建了一种形式全新的量子力学理论.

薛定谔的上述理论与现在正统的量子力学在观念上有三点重要的区别:

第一,在薛定谔以前,不论是普朗克的黑体辐射理论、爱因斯坦的光量子假设、玻尔的氢原子理论和海森伯的矩阵力学,都把量子化作为自己理论的基本假设之一,量子论和量子力学这一名词也是由此而来的. 但薛定谔的理论不需要这一假设,氢原子的能量只能取一些分立值是解能量本征值方程所得出的自然结果. 本征值可能连续,也可能分立,这是数学上早已知道的结论. 所以薛定谔认为不应把量子化作为量子物理学的一个基本假设,因此他把自己的论文特地命题为《量子化是本征值问题》.

第二,薛定谔理论的最巧妙之处在于他引入了变换 $W=\hbar\lg\psi$. 上面我们已经说过,因为 $\lg\psi$ 没有量纲,因此这里的 $\hbar$ 起了作用量函数 W 的单位的作用. 原则上任意一个物理量的单位可大可小,例如电荷,我们既可取库仑为单位,也可取电子电荷为单位. 所以这个变换是一般的,并不包含任何特别的假设在内. $\hbar$ 这个常数进入了氢原子的能级公式,与玻尔氢原子的理论对照,它正好就是普朗克常数. 因此表征量子物理学基本特征的这个常数,在薛定谔理论中得来也是极自然的. 正像取电荷的单位为电子电荷 e 一样,而实验表明 e 正好是电荷的最小单位. 薛定谔取 $\hbar$ 为作用量单位,大量的实验事实表明作用量只能以 $\hbar$ 为单位进行变化,因此 $\hbar$ 就成了作用量的最小单位. 如果实验表明电荷可以取更小的单位,例如取 $\frac{e}{3}$,作用量也可取更小的单位,例如取 $\frac{\hbar}{2}$,那就承认实验事实就是了,没有必要像普朗克最初引入 $\hbar$ 这个量时大肆渲染这是"孤注一掷"的行动.

第三,从薛定谔的上述工作可以看到,波函数 ψ 是从经典作用函数 W 转化而来的,代表了具有波粒二象性的客体本身的性质. 因此在薛定谔的心目中,ψ 就像电磁波、流体的速度场、温度场、密度场一样是物理实在,所以他把 ψ 称为物质波. 这与现在正统的量子力学解释 ψ 是概率波完全不同.

以上根据薛定谔的原始论文,把定态薛定谔方程的导出向读者作了介绍.《量子化是本征值问题》第二、三、四篇的内容这里不再作介绍. 从上面所述可以看到,这一理论完全在经典力学哈密顿理论的范畴之内,所以它是力学理论拓展到物理学其他领域的一个很好的范例.

最后有一点要向读者作说明,薛定谔上述理论中最关键之处有二:一是作变换(3.2),二是把(3.3)式作为(3.4)式中的 $F(x,y,z)$. 薛定谔本人对这关键的两步没有作任何解释,而在他的第二篇论文中对此特地说了这样一句话:"把开普勒问题中作为力学问题的哈密顿-雅可比方程和与之'相联系'的波动方程之间存在着普遍的对应关系……我们是用本身难以理解的变换式(3.3)和同样难以理解的把某个等于零的表示式变为该表示式的空间积分应保持稳定的假设,来描述这一对应关系的." 并且还表示他"将不再作进一步讨论". 薛定谔的工作是成功的,他因此获得了 1933 年诺贝尔物理学奖,这是历史所下的结论. 但他为什么对上述两个关键之处,不亲自作出解释,而让他人去任意猜想、理解,实在令人费解. 本节对这两处作了详细的解释,但这仅是本书作者的理解,是符合薛定谔的本意,还是说出了薛定谔自己当时还没有完全弄清楚的意思? 或是作了错误的解释,属于"画蛇添足"、"狗尾续貂"的败笔? 请读者自行思考.

为什么薛定谔关于量子力学的观点没有被多数物理学家所接受而成为现行量子力学的正统理论,这个问题超出了本书的范围,这里不作讨论.

上面介绍了薛定谔建立氢原子波动力学方程的全过程,但从(3.5)式得出(3.6)和(3.7)式的运算过程我们没有具体给出,原因是这一步运算所涉及的数学知识较多,不适宜在本课程中作详细讨论. 现在我们换一个一维谐振子问题,把上述运算过程再重复一遍,补上从(3.5)到(3.6)和(3.7)的这一步的具体运算.

【例】 用薛定谔的方法导出一维谐振子的波动力学方程.

解: 一维谐振子的哈密顿函数为

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{2m}p_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= \frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \frac{m}{2}\omega^2 x^2,\end{aligned} \tag{1}$$

作变换(3.2)后得谐振子的经典哈密顿-雅可比方程

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{m\omega^2}{2}x^2 - E\right)\psi^2 = 0. \tag{2}$$

将上式左边作为(3.4)式中的被积函数 $F(x)$,代入之得

$$\delta J = \delta\int_1^2 \left[\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{m\omega^2}{2}x^2 - E\right)\psi^2\right]\mathrm{d}x = 0, \tag{3}$$

$$\delta\int_1^2 \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x = \frac{\hbar^2}{m}\int_1^2\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)\delta\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\hbar^2}{m}\int_1^2 \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\delta\psi)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\hbar^2}{m}\int_1^2 \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\delta\psi\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)\delta\psi\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\hbar^2}{m}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\delta\psi\Big|_1^2 - \frac{\hbar^2}{m}\int_1^2 \frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}\delta\psi\mathrm{d}x, \tag{4}$$

$$\delta\int_1^2\left(\frac{m\omega^2}{2}x^2 - E\right)\psi^2\mathrm{d}x = \int_1^2 2\left(\frac{m\omega^2}{2}x^2 - E\right)\psi\delta\psi\mathrm{d}x. \tag{5}$$

将(4)和(5)代入(3)得

$$\delta J = \frac{\hbar^2}{m}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\delta\psi\Big|_1^2 - \int_1^2\left[\frac{\hbar^2}{m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} - 2\left(\frac{m\omega^2}{2}x^2 - E\right)\psi\right]\delta\psi\mathrm{d}x = 0. \tag{6}$$

由此可得

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{m\omega^2}{2}\right)\psi = E\psi, \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\delta\psi\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0. \tag{8}$$

(7)式就是一维谐振子的量子力学方程,(8)式可以看作是方程(7)的边界条件.

方程(7)可改写为

$$\hat{H}\psi = E\psi,$$

其中 $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$. 它正好是根据(3.10)式将经典哈密顿函数(1)中的动量 p 看作是微分算符 $\hat{p}_x = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ 所得的结果,与氢原子的结论完全一样.

§9.4 刘维尔定理

刘维尔(Liouville)定理是统计物理学的理论基础之一. 这个定理的证明要用经典力学的哈密顿理论. 在这里我们只要花少量篇幅即可给出这个定理的证明. 但在统计物理学要为刘维尔定理作出证明就要化不少篇幅了.

统计物理研究由大量分子、原子所组成的物理体系. 对于这种体系,讨论单个粒子的性质,既无实际可能,也无实际价值,真正有意义的是体系中全部粒子的力学量的平均值. 但是由于单个粒子的力学量无法求得,因此如何求平均值成为统计物理必须首先要解决的问题. 比较严格的一种学说是引入统计系综的概念. 统计系综指的是大量宏观性质完全相同的力学体系的集合. 引入统计系综的概念后,就可以对系综求平均得出力学体系在时间上的平均行为. 在建立这样一种理论体系时,需要用到刘维尔定理. 刘维尔定理的内容可简单的表述如下:相空间中统计系综的分布密度在运动过程中不变. 下面我们就来证明这个定理.

设一个由 N 个相同粒子所组成的物理体系,每个粒子的坐标和动量用 q_α、p_α 表示,$\alpha = 1,2,3,\cdots,N$,N 是一个大数. 这样的一个力学体系就是相应的统计系综的一个“样本”,也就是说,统计系综是由与这个力学体系的组成完全相同,但初始条件不同的许多个“样本”组成的. 现在我们以 N 个粒子的坐标 q 和动量 p 为坐标轴构造一个 $6N$ 维空间(每个粒子有 3 个

坐标分量和3个动量分量),这样一个相空间称为这个力学体系的Γ空间.因为在任意时刻t,每个“样本”的q和p的值都是确定的,因此Γ空间中的每一个点就表示一个“样本”在某一时刻的状态.这样的点称为“代表点”.因此统计系综就是Γ空间中的一群代表点.这些代表点在Γ空间中的分布一般是不均匀的,有的区域代表点密集,有的区域代表点稀疏.因此可以引入代表点密度的概念.设在相空间体积元$\mathrm{d}\Gamma_1$内,代表点的数目为$\mathrm{d}N_1$,则

$$\rho=\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}\Gamma_1}$$

就代表点在$\mathrm{d}\Gamma_1$区域中的密度.经过时间t后,原来在$\mathrm{d}\Gamma_1$中的代表点运动到Γ空间的其他区域去了,占据了$\mathrm{d}\Gamma_2$的位置,如图9.1所示.这两个体积元中代表点的数目是相同的,即$\mathrm{d}N_1=\mathrm{d}N_2$.这是因为在运动过程中,代表点的相轨迹是不会相交的,如果相交,则表明相同力学体系在相同初始条件下有不同的运动规律,这和经典力学的基本假设相矛盾,是不可能的.刘维尔定理要证明相空间中统计系综的分布密度在运动过程中不变,就是要证明:

$$\rho=\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}\Gamma_1}=\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}\Gamma_2}=\text{常数}. \tag{4.1}$$

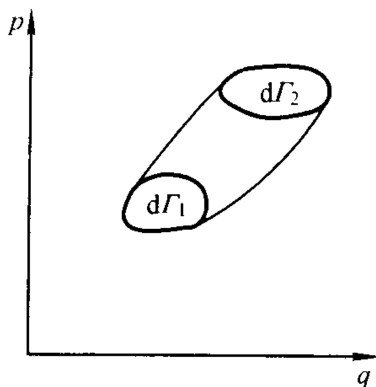


图9.1 刘维尔定理示意图

因为$\mathrm{d}N_1=\mathrm{d}N_2$,所以要证上式,只要证明$\mathrm{d}\Gamma_1=\mathrm{d}\Gamma_2$即可.

为了证明相空间中体积元在运动过程中保持不变,我们分两步进行.首先证明一个粒子的一对正则变量q、p从时刻t到$t+\mathrm{d}t$的变化可以看成是一种正则变换.然后再证明相空间体积元在正则变换下保持不变.把两者结合起来,就可证明(4.1)中的$\mathrm{d}\Gamma_1=\mathrm{d}\Gamma_2$.

现在我们来证明:正则变量q、p从时刻t到$t+\mathrm{d}t$的变化是一种正则变换.要证明这一点,我们只要能找到一个适当的母函数,使变换后的新正则变量Q、P为

$$\begin{cases}Q_\alpha=q_\alpha+\mathrm{d}q_\alpha,\\ P_\alpha=p_\alpha+\mathrm{d}p_\alpha.\end{cases}\quad \alpha=1,2,\cdots,N \tag{4.2}$$

即可.这是可以做到的.如果我们取第二类正则变换母函数F_2为

$$F(q,P)=\sum_\alpha q_\alpha P_\alpha, \tag{4.3}$$

则由第八章(5.12)式得

$$\begin{cases}p_\alpha=\dfrac{\partial F_2}{\partial q_\alpha}=P_\alpha,\\ Q_\alpha=\dfrac{\partial F_2}{\partial P_\alpha}=q_\alpha,\end{cases}\quad \text{或}\begin{cases}Q_\alpha=q_\alpha,\\ P_\alpha=p_\alpha.\end{cases} \tag{4.4}$$

这是一个全同正则变换.比较(4.2)和(4.4),两者只相差无穷小量$\mathrm{d}q_\alpha$和$\mathrm{d}p_\alpha$.因此我们可以认为要得(4.2)式,可以在(4.3)式的母函数中再加上一个无穷小项,即可取

$$F_2(q,P)=\sum_\alpha q_\alpha P_\alpha+\varepsilon G(q,P,t), \tag{4.5}$$

其中ε为无穷小量,G为一个任意函数.现在我们作近似,由于p_α和P_α只相差一个无穷小量$\mathrm{d}p_\alpha$,因此如果我们在全部计算中只保留到一阶无穷小量,那么(4.5)中函数$G(q,P,t)$中

的 P_α 可用 p_α 来代表，作这样的近似，其产生的误差为二阶无穷小，可以不计算，因此我们可把(4.5)式近似表示为

$$F_2(q,P)=\sum_\alpha q_\alpha P_\alpha+\varepsilon G(q,p,t).\tag{4.6}$$

由(4.6)式所得出的正则变换称为无穷小正则变换，变换前后相差一阶无穷小量．现在我们令

$$\varepsilon=\mathrm{d}t,\quad G(q,p,t)=H(q,p,t),$$

代入(4.6)得

$$F_2(q,P)=\sum_\alpha q_\alpha P_\alpha+H(q,p,t)\mathrm{d}t.\tag{4.7}$$

利用这样一个母函数，我们即可得

$$\begin{cases}p_\alpha=\dfrac{\partial F_2}{\partial q_\alpha}=P_\alpha+\dfrac{\partial H}{\partial q}\mathrm{d}t=P_\alpha-\dot{p}_\alpha\mathrm{d}t=P_\alpha-\mathrm{d}p_\alpha,\\[2ex] Q_\alpha=\dfrac{\partial F_2}{\partial P_\alpha}=q_\alpha+\dfrac{\partial H}{\partial p}\mathrm{d}t=q_\alpha+\dot{q}_\alpha\mathrm{d}t=q_\alpha+\mathrm{d}q_\alpha.\end{cases}$$

上式即为(4.2)式．这样就证明了相空间体积从 $\mathrm{d}\Gamma_1$ 变化为 $\mathrm{d}\Gamma_2$ 是一种正则变换．

现在再来证明相空间体积在正则变换下保持不变，即证明

$$P=\int\cdots\int\mathrm{d}q_1\cdots\mathrm{d}q_{3N}\mathrm{d}p_1\cdots\mathrm{d}p_{3N}=\int\cdots\int\mathrm{d}Q_1\cdots\mathrm{d}Q_{3N}\mathrm{d}P_1\cdots\mathrm{d}P_{3N}.\tag{4.8}$$

我们知道，在重积分中当积分自变量从 q、p 变到 Q、P 时，体积元的变换是按下面公式进行的

$$\int\cdots\int\mathrm{d}Q_1\cdots\mathrm{d}Q_s\mathrm{d}P_1\cdots\mathrm{d}P_s=\int\cdots\int D\mathrm{d}q_1\cdots\mathrm{d}q_s\mathrm{d}P_1\cdots\mathrm{d}P_s,\tag{4.9}$$

式中 D 是雅可比行列式：

$$D=\frac{\partial(Q_1,Q_2,\cdots,Q_s;P_1,P_2,\cdots,P_s)}{\partial(q_1,q_2,\cdots,q_s;p_1p_2,\cdots,p_s)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial Q_1}{\partial q_1}&\cdots&\dfrac{\partial Q_s}{\partial q_1}&\dfrac{\partial P_1}{\partial q_1}&\cdots&\dfrac{\partial P_s}{\partial q_1}\\ \dfrac{\partial Q_1}{\partial q_2}&\cdots&\dfrac{\partial Q_s}{\partial q_2}&\dfrac{\partial P_1}{\partial q_2}&\cdots&\dfrac{\partial P_s}{\partial q_2}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots&\\ \dfrac{\partial Q_1}{\partial p_s}&\cdots&\dfrac{\partial Q_s}{\partial p_s}&\dfrac{\partial P_1}{\partial p_s}&\cdots&\dfrac{\partial P_s}{\partial p_s}\end{vmatrix}.\tag{4.10}$$

因此要证明(5.8)式归结为证明在正则变换下雅可比行列式 $D=1$．

首先我们来证明在 $s=1$ 的情况下(4.10)式成立，这时

$$D=\frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial Q}{\partial q}&\dfrac{\partial P}{\partial q}\\ \dfrac{\partial Q}{\partial p}&\dfrac{\partial P}{\partial p}\end{vmatrix}=\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p}-\frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p}.\tag{4.11}$$

设从 $q,p\to Q,P$ 的变换是通过第二类正则变换的母函数 $F_2(q,p,t)$进行的，因此

$$\frac{\partial Q}{\partial q}=\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial F_2}{\partial P}\right)=\frac{\partial^2F_2}{\partial q\partial P},$$

$$\frac{\partial P}{\partial p}=\frac{1}{\dfrac{\partial p}{\partial P}}=\frac{1}{\dfrac{\partial}{\partial P}\left(\dfrac{\partial F_2}{\partial q}\right)}=\frac{1}{\dfrac{\partial^2 F_2}{\partial P\partial q}},$$

并且由于 F_2 的独立变量为 q, P,因此

$$\frac{\partial P}{\partial q}=0.$$

将上述三个式子代入(4.11)即得 $D=1$.

在证得了 $s=1$ 时(4.10)式成立,再利用雅可比行列式的一些性质,就可以证明当 $s=3N$ 时也成立. 由于运算比较繁琐,这里从略.

综合以上所得,刘维尔定理成立.

相空间中代表点的密度应为 q_α、p_α 和 t 的函数,即 $\rho=\rho(q,p,t)$,因此由第八章(6.4)式得

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+[H,\rho],$$

代入刘维尔定理(5.1),得

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+[H,\rho]=0. \tag{4.12}$$

当体系达到统计平衡时,$\dfrac{\partial\rho}{\partial t}=0$,此时

$$[H,\rho]=0. \tag{4.13}$$

(4.12)和(4.13)是刘维尔定理的推论,在统计物理中将利用这些结论导出各种体系的统计分布函数.

§ 9.5　经典微扰理论

若一个力学体系的哈密顿函数 H 可以写成两部分的和:

$$H=H_0+H_1, \tag{5.1}$$

其中 H_0 的运动是已知的,即方程

$$\dot{q}_\alpha=\frac{\partial H_0}{\partial p_\alpha},\quad \dot{p}_\alpha=-\frac{\partial H_0}{\partial q_\alpha},\quad \alpha=1,2,\cdots \tag{5.2}$$

的解是已知的,那么可以证明,通过解 H_1 的一个正则方程,然后和方程(5.2)的解迭代后就可得到原正则方程的解. 如果 H_1 的正则方程不容易求解,但 $H_1\ll H_0$,则可通过多次迭代求得原正则方程的近似解. 这种方法称为**微扰理论**. 下面对此作一介绍.

正则方程和哈密顿 - 雅可比方程是等价的. 因此方程(5.2)和方程 $\dfrac{\partial S_0}{\partial t}+H_0=0$ 是等价的. 既然 H_0 的方程(5.2)的解是已知的,那么我们可以认为

$$S_0=S_0(q,\eta,t) \tag{5.3}$$

也是已知的. 在 § 8.7 中我们曾经指出,如果用哈密顿 - 雅可比方程的解 $S_0(q,\eta,t)$ 作为第二类正则变换的母函数 $F_2(q,P,t)$,则变换后新的哈密顿函数为零

$$H_0^* = 0. \tag{5.4}$$

新的正则变量均为常数：

$$\begin{cases} P_\alpha = \eta_\alpha = f_\alpha(p,q,t) = \text{常数}, \\ Q_\alpha = \xi_\alpha = g_\alpha(p,q,t) = \text{常数}, \end{cases} \quad \alpha = 1,2,\cdots,s. \tag{5.5}$$

由上式可解得

$$\begin{cases} q_\alpha = q_\alpha(\eta,\xi,t), \\ p_\alpha = p_\alpha(\eta,\xi,t), \end{cases} \quad \alpha = 1,2,\cdots,s. \tag{5.6}$$

它实际上就是我们所已知的方程(5.2)的解.

现在如果我们用函数(5.3)对原 H 的正则方程作正则变换，那么会得到什么结果呢？

(1) 由于 H 和 H_0 中的 p_α、q_α 是相同的，因此在同一母函数 $S_0(q,\eta,t)$ 的变换下，H 变换后新的正则变量和 H_0 变换后新的正则变量是相同的，即仍为 η_α 和 ξ_α，它们和旧的正则变量之间的关系仍为(5.5)式或(5.6)式.

(2) 新的哈密顿函数不再为零

$$H^* = H_0^* + H_1^* = H_1^* \neq 0.$$

写得更明白一点则为

$$\begin{aligned} H^* &= H_1^*(p_\alpha, q_\alpha) \\ &= H_1^*(p_\alpha(\eta,\xi,t), q_\alpha(\eta,\xi,t)) \\ &= H_1^*(\eta,\xi,t). \end{aligned} \tag{5.7}$$

(3) 新的正则方程为

$$\dot{\xi}_\alpha = \frac{\partial H_1^*}{\partial \eta_\alpha}, \quad \dot{\eta}_\alpha = -\frac{\partial H_1^*}{\partial \xi_\alpha}, \quad \alpha = 1,2,\cdots,s. \tag{5.8}$$

这表明，ξ_α 和 η_α 将是时间的函数，和 H_0 的变换情况不同.

从这三点结论可以看出新的正则变量 η_α 和 ξ_α 有一个绝妙的性质. 对 H_0 来说，η_α 和 ξ_α 是常数(为明白起见，下面我们用 η_α^0 和 ξ_α^0 来表示)：

$$\eta_\alpha = \eta_\alpha^0 = \text{常数}, \xi_\alpha = \xi_\alpha^0 = \text{常数}, \alpha = 1,2,\cdots,s. \tag{5.9}$$

对 H 来说，η_α 和 ξ_α 则是时间 t 的函数，在 $t=0$ 时等于 η_α^0 和 ξ_α^0. 因此方程(5.8)的解可表示为

$$\begin{cases} \eta_\alpha = \eta_\alpha(\eta^0,\xi^0,t), \\ \xi_\alpha = \xi_\alpha(\eta^0,\xi^0,t), \end{cases} \quad \alpha = 1,2,\cdots,s. \tag{5.10}$$

到此为止，原来 H 的正则方程的解我们已经找到了. 因为上面已经指出，不论对原来 H 的正则方程还是 H_0 的正则方程，用母函数 $S_0(q,\eta,t)$ 作变换后，新旧正则变量之间的变换均为(5.6). 现在(5.10)式既然是对 H 的正则方程作变换后 η_α 和 ξ_α 的表示式，那么将它们迭代到(5.6)式中即可得原来 H 的正则方程的解

$$\begin{cases} q_\alpha = q_\alpha(\eta(\eta^0,\xi^0,t), \xi(\eta^0,\xi^0,t), t) \\ \quad\;\; = q_\alpha(\eta^0,\xi^0,t), \\ p_\alpha = p_\alpha(\eta(\eta^0,\xi^0,t), \xi(\eta^0,\xi^0,t), t) \\ \quad\;\; = p_\alpha(\eta^0,\xi^0,t), \end{cases} \quad \alpha = 1,2,\cdots,s. \tag{5.11}$$

我们可以对上述求解方法作一些几何解释，如图9.2所示，设 $t=0$ 时，在相空间中体系的状态为 η_α^0、ξ_α^0，所对应的点为 M_0. 在哈密顿函数 H 的作用下，到时刻 t 时，相点运动到了 G 点. 从 M_0 到 G 可通过两种途径到达. 一种是沿曲线 M_0G 运动，它所对应的是直接解 H 的正则方程. 也可把曲线 M_0G 看成是由 M_0M_{0t} 和 $M_{0t}G$ 两条曲线叠加而成的，其中曲线 M_0M_{0t} 是由方程(5.10)所得的 η_α 和 ξ_α 的值在 $t=0$ 平面上的轨道，这由 H_1 所决定；曲线 $M_{0t}G$ 与曲线 M_0Q 是相同的，是由 H_0 的正则方程的解所决定的，这是已知的. 后一种途径的实质是把由于能量 H_1 的扰动，使真实路径 M_0G 偏离未受扰动时的 H_0 的路径 M_0Q，看成真实路径仍和 H_0 一样，但初始条件受到了扰动(从 M_0 点沿曲线 M_0M_{0t} 运动)，两者是一样的. 即认为能量的扰动和初始条件的扰动是等价的. 因此我们实际解题时并不需要按照上面的步骤从解 H_0 的哈密顿－雅可比方程着手，找出 η_α 和 ξ_α，把最后的解表示为(5.11)的形式，从而可以从正则方程(5.2)的任意一个解

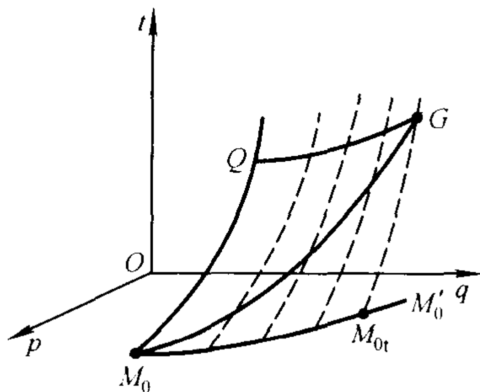


图 9.2

$$\begin{cases} p_\alpha = p_\alpha(p^0, q^0, t), \\ q_\alpha = q_\alpha(p^0, q^0, t), \end{cases} \quad \alpha = 1,2,\cdots,s \tag{5.12}$$

出发，解方程

$$\dot{p}_\alpha^0 = -\frac{\partial H_1}{\partial q_\alpha^0},\ \dot{q}_\alpha^0 = \frac{\partial H_1}{\partial p_\alpha^0}, \quad \alpha = 1,2,\cdots,s, \tag{5.13}$$

得到

$$\begin{cases} q_\alpha^0(t) = f_\alpha(p^0, q^0, t), \\ p_\alpha^0(t) = g_\alpha(p^0, q^0, t), \end{cases} \quad \alpha = 1,2,\cdots,s. \tag{5.14}$$

将(5.14)迭代到(5.12)中去，得

$$\begin{cases} p_\alpha = p_\alpha(p^0(t), q^0(t), t), \\ q_\alpha = q_\alpha(p^0(t), q^0(t), t), \end{cases} \quad \alpha = 1,2,\cdots,s. \tag{5.15}$$

这就是原 H 的正则方程的解. 因此当 H_0 的解(5.12)已知时，真正要解的方程是(5.13).

如果方程(5.13)也不能直接求解，那怎么办呢？在 $H_1 < H_0$ 的条件下，可通过多次迭代来求得原 H 的正则方程的近似解. 先把(5.12)作为零级近似解，代入方程(5.13)中. 在解方程(5.13)时，把方程右边的 q_α^0、p_α^0 看作常数，积分后代回到(5.12)式中就得到一级近似解. 然后再重复一次就可得到二级近似解. 依次迭代下去，可以得到三级、四级……近似解. 如果 $H_1 \ll H_0$，那么迭代两三次后，就可得到精确度很高的解了. 这就是经典力学中微扰理论的基本思想.

** 第十章　流　　体

本章用牛顿力学方法讨论流体的运动问题. 首先讨论流体运动的欧拉描述方法,并在此基础上建立理想流体的动力学方程——欧拉方程和连续性方程. 接着讨论欧拉方程的求解问题. 但只讨论两种最简单、最常用的情况:伯努利积分和无旋运动. 最后给出粘滞流体的动力学方程——斯托克斯-纳维叶方程,此处推导从略,仅给出了球坐标和柱坐标中方程的具体形式,以供实用.

§10.1　流体运动的描述

研究流体的运动,中心问题是建立流体的动力学方程,建立方程时既可以用牛顿动力学的方法,也可以用拉格朗日方程的方法. 限于篇幅,本书只能讲一些流体力学最基本的内容. 在这种情况下采用牛顿力学的方法比较方便. 所以本章全部以牛顿力学的形式来讨论问题.

牛顿第二定律 $\boldsymbol{F}=m\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$是对一个质点来说的. 要把这个方程用到流体中来,首先要建立流体质点的概念. 从微观的角度来看,无论是液体还是气体,都是由大量不断运动着的分子、原子所组成的. 由于分子、原子之间总是存在间隙,因此表征流体性质的各种物理量,在空间的分布是不连续的. 并且由于分子的随机运动,空间上一点的物理量对于时间也是不连续的. 但是在流体力学中,我们感兴趣的只是流体的宏观特性,它是大量分子的统计平均值. 因此我们不必以流体的分子-原子作为研究对象,可以采用流体的连续介质模型,即认为流体是由许多连续分布的物质点或流体微团所组成,每个这样的"质点",是互相紧挨在一起的,它们之间没有任何空隙. 这种流体微团在宏观上是如此之小,小到其内部各部分的物理量都可看成是均匀的,以致可用一个"几何点"来代表. 另一方面视作为质点的流体微团从微观上看又必须充分大,大到其中仍包含千百万个分子、原子,以便统计规律可以完全适用. 对于一般情况下的流体,这两个要求总是可以同时满足的. 例如在常压下的气体,取体积为 $10^{-9}\ \mathrm{cm}^3$的流体"质点",宏观上可以认为小到不必再考虑其内部的不均匀性了;但这样的流体团仍含有 10^{10}个以上的分子,在微观上它足够大了,统计规律性已能很好满足. 根据这样规定的流体质点,表示流体性质的空间每一点的物理量的数学表示式——以质量为例——应理解为

$$\rho=\lim_{\Delta\tau\to\Delta\tau_0}\frac{\Delta m}{\Delta\tau},\tag{1.1}$$

式中 $\Delta\tau_0$ 为取作流体质点的流体团的体积,$\Delta\tau$ 为所考察的空间一点附近的体积元,Δm 是 $\Delta\tau$ 内的流体质量,ρ 是空间该点的密度.

研究流体的运动,通常有两种不同的方法. 一种叫拉格朗日法,它把上面所说的那种流

体质点看作研究对象，给出每个质点在时刻 t 时的位置 x、y、z，及其速度和加速度，整个流体看成是无数个质点所组成的质点系．它和通常的力学方法没有差别，实际应用时是很麻烦的．另一种方法叫欧拉法，它用一个矢量函数

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x, y, z, t) \tag{1.2}$$

来描述整个流体的速度分布，$\boldsymbol{v}$ 是空间坐标 x、y、z 和时间 t 的函数．它的物理意义是：如果把 x、y、z 看成常数，t 当作变数，则得到不同时刻经过空间某指定点的流体质点的速度；反之，如果把 t 看成常数，而 x、y、z 当作可变的，则得到在指定时刻空间各点的流体质点的速度分布．因此欧拉法不是研究某些个别流体质点的运动过程，而是研究在指定时刻空间各点的流体的速度分布及其随时间的变化规律，所以我们把(1.2)中的 $\boldsymbol{v}$ 称为流体的速度场．类似地，在欧拉法中，反映流体性质的其他物理量，例如密度 ρ、压力 p、温度 T 等也都是 x、y、z 和 t 的函数．

由(1.2)式，可以给出流体质点加速度 $\boldsymbol{a}$ 的表示式．流体质点的加速度，是指在给定时刻经过空间某点(x, y, z)上的流体质点的加速度，经过时间 $\mathrm{d}t$ 以后，原来在 x、y、z 处的流体质点已不再在原来的位置上了．因此流体质点本身的坐标 x、y、z 也是时间的函数，它们对时间的微商正是该质点在时刻 t 的速度．即，如令

$$\boldsymbol{v}(x, y, z, t) = v_x(x, y, z, t)\boldsymbol{i} + v_y(x, y, z, t)\boldsymbol{j} + v_z(x, y, z, t)\boldsymbol{k}, \tag{1.3}$$

则

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \\ v_y = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \\ v_z = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}. \end{cases} \tag{1.4}$$

于是我们可得流体质点的加速度的表示式为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}v_x + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y}v_y + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}v_z \\ &= \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

我们通常把$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$叫做速度矢量的**随体微商**，它反映了随着流体质点运动的速度的变化，$\dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}$称为速度的**局部微商**，它反映了空间固定点的速度变化，$(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}$ 称为**对流微商**，它给出流体质点的速度随空间的变化．这种微商法不仅适用于速度矢量 $\boldsymbol{v}$，而且对任何矢量和标量，只要它是 x、y、z、t 的函数，都适用．例如对密度 ρ 也有

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x\frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y\frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z\frac{\partial \rho}{\partial z} \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\rho. \end{aligned} \tag{1.6}$$

§10.2 理想流体的动力学方程

上节我们已经给出了流体质点的质量和加速度的表示式，只要再给出作用在流体质点上

的力的表示式,就可以建立流体的动力学方程了.

作用在流体上的力,可分为体力和面力两类,单位面积上所受到的面力称为**应力**,和流体表面垂直的应力称为**正应力**,和流体表面平行的应力称为**切应力**. 对于实际流体来说,两层流体之间相互滑动时,受到阻力作用,这种阻力就是切应力,也就是通常所称的粘滞力. 对于像水和空气这种常见的普遍流体,粘度很小,在许多实际问题中常常可以忽略. 粘滞力可以忽略的流体,称为**理想流体**. 本节只讨论理想流体的动力学方程.

因为理想流体没有切应力,因此面力一定和表面垂直. 并且考虑到流体质点相互疏远时不受到流体本身的任何抗拒,因此理想流体中的应力一定是压力. 并且可以证明,理想流体中任意一点上的压力与所取的表面的法线方向无关. 证明如下:取一个如图 10.1 所示的小棱柱形流体元,它的两个侧面都是三角形. 令 p_1、p_2 和 p_3 分别为作用在棱柱体表面 a、b、c 上的压力,并假定这三个面的面积分别为 σ_1、σ_2 和 σ_3. 因为作用在流体元上的体力和其体积成正比,面力和面积成正比,因此如果把棱柱体取得很小,在极限情况下,体力是三阶小量,面力是二阶小量,体力与面力相比可以忽略. 如果这块流体处于平衡状态,则两个三角形侧面上的力互相抵消,由力的平衡方程得

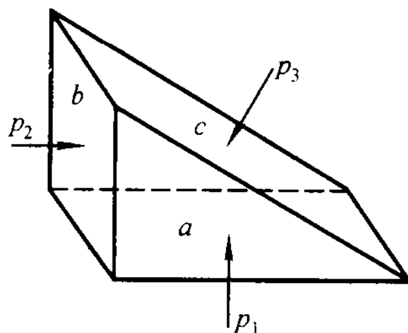


图 10.1

$$p_1\sigma_1 - p_3\sigma_3\cos\theta_{13} = 0\ ,$$
$$p_2\sigma_2 - p_3\sigma_3\cos\theta_{23} = 0\ ,$$

式中 σ_1、σ_2、σ_3 分别是三个矩形的面积,θ_{ij} 为 σ_i 面与 σ_j 面的夹角. 从图中可知

$$\sigma_1 = \sigma_3\cos\theta_{13}\ ,$$
$$\sigma_2 = \sigma_3\cos\theta_{23}\ .$$

因此

$$p_1 - p_3 = 0\ ,$$
$$p_2 - p_3 = 0\ .$$

所以

$$p_1 = p_2 = p_3 = p. \tag{2.1}$$

这就证明了理想流体中任一点的压力,在各个方向上都相同.

现在我们可以建立理想流体的动力学方程了. 让我们在流体内划出一个以封闭曲面 σ 为边界的任意一块流体 τ,令 $\boldsymbol{F}$ 为作用在单位流体质量上的体力,p 为作用在表面 σ 上的压力,ρ 为单位体积内的质量,$\boldsymbol{v}$ 为 τ 内各个流体质点的速度. $\boldsymbol{F}$、p、ρ、$\boldsymbol{v}$ 都是空间和时间的函数,其中 $\boldsymbol{F}$ 是已知的,p、ρ、$\boldsymbol{v}$ 都是待求的. 把 τ 中连续分布的全部流体质点看成一个质点系,应用质点系的动量定律可得

$$\int_\tau \rho\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\tau = \int_\tau \rho\,\boldsymbol{F}\mathrm{d}\tau - \oint_\sigma p\,\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\ . \tag{2.2}$$

上式右边面力一项,因为压力是垂直体积 τ 的表面向内的,而 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 的方向则是向外的,因此前面有一负号. 利用奥高定理可以证明

$$\oint_{\sigma} p\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_{\tau} (\nabla p)\mathrm{d}\tau .$$

将它代入(2.2)式可得

$$\int_{\tau}\left(\rho \boldsymbol{F} - \rho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} - \nabla p\right)\mathrm{d}\tau = 0.$$

由于 τ 是任意的，要使上式成立，必须

$$\rho\boldsymbol{F} - \rho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} - \nabla p = 0.$$

再将(1.5)式代入上式，最后得

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F} - \frac{\nabla p}{\rho}. \tag{2.3}$$

写成分量的形式则为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \dfrac{\partial v_x}{\partial z} = F_x - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \dfrac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \dfrac{\partial v_y}{\partial z} = F_y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \dfrac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \dfrac{\partial v_z}{\partial z} = F_z - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}. \end{cases} \tag{2.4}$$

(2.3)或(2.4)称为**欧拉动力学方程**，是理想流体动力学的基本方程.

欧拉方程中有 v_x、v_y、v_z、ρ 和 p 共五个未知函数，但方程式只有三个，因此方程式不封闭，至少还要再寻找两个独立的方程. 其中一个是根据质量守恒定律导出的连续性方程. 下面来导出这个方程.

流体在运动过程中，不仅其形状会发生变化，而且一般情况下密度也会发生变化，但质量不会发生变化. 考察流体中任意一个体积 τ，在 τ 的表面取一面积元 $\mathrm{d}\sigma$，单位时间内经过 $\mathrm{d}\sigma$ 从 τ 中流出去的质量等于以 $\mathrm{d}\sigma$ 为底，以流体的速度 $\boldsymbol{v}$ 在 $\mathrm{d}\sigma$ 法线上的分量为高的柱体体积 $v_n\mathrm{d}\sigma$ 中所包含的质量，经过整个表面 σ，从体积 τ 中流出的流体质量为

$$\int_{\sigma} \rho v_n \mathrm{d}\sigma = \int \rho \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} .$$

式中 ρ 是流体的密度，v_n 可正可负，正的 v_n 表示流出，负的 v_n 表示流入. 因此上式实际上表示单位时间内从 τ 中流出的净质量. 因为 τ 是固定不变的，当流出的质量多于流入的质量时，τ 中的质量就要减少. 单位时间内 τ 中质量的减少等于

$$-\int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t}\mathrm{d}\tau .$$

因此根据质量守恒定律，我们可得

$$\int_{\sigma} \rho \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = -\int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t}\mathrm{d}\tau .$$

再利用奥高定理得

$$\int_{\tau}\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})\right]\mathrm{d}\tau = 0 .$$

由于 τ 是任意的，因此

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = 0 . \tag{2.5}$$

由于

$$\nabla\cdot(\rho \boldsymbol{v})=\nabla \rho\cdot \boldsymbol{v}+\rho \nabla\cdot \boldsymbol{v},$$

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial \rho}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla \rho,$$

因此(2.5)式又可写为

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\rho\nabla\cdot \boldsymbol{v}=0. \tag{2.6}$$

(2.5)或(2.6)都是反映流体质量守恒的方程式,这就是**流体的连续性方程**.

欧拉方程加上连续性方程,共有 4 个独立的方程. 还缺少一个方程,可通过流体的物态方程来得到. 物态方程通常含有温度 T,它也是空间和时间的未知函数. 因此一般情况下,单由物态方程,虽然增加了一个新的独立方程,但同时也增加了一个新的未知函数,仍需要继续寻找新的独立方程. 这种情况比较复杂,限于篇幅,我们不予讨论. 这里我们只讨论两种最简单的情况. 一是密度为常数的不可压缩流体:

$$\rho=\text{常数}. \tag{2.7}$$

一般情况下的液体都可看成是不可压缩的流体. 对于气体,在许多情况下也可看成是不可压缩的流体. 譬如说以 100 m/s 以下稳定流动的气体密度的变化不超过 2%,也可看成为不可压缩流体. 对于不可压缩流体,由(2.6)式,连续性方程可简化为

$$\nabla\cdot \boldsymbol{v}=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0. \tag{2.8}$$

另一种情况是流体的密度只是压力的函数,即所谓的**正压流体**:

$$\rho=\rho(p). \tag{2.9}$$

(密度和温度有关的流体称为**斜压流体**)例如满足玻意耳定律的气体,其状态方程为

$$\frac{p}{\rho}=\text{常数},$$

或一般的绝热方程

$$\frac{p}{\rho^{\gamma}}=\text{常数},$$

它们都是正压流体.

不可压缩流体或正压流体的状态方程,不增加新的未知函数,它和欧拉方程及连续性方程一起,就是完整的理想流体的动力学方程组. 这是一组偏微分方程. 为求解这组方程,除了需要给出通常的初始条件外,还需要给出边界条件. 边界条件有两种,一种是速度必须满足的**运动边界条件**,另一种是压力必须满足的**动力边界条件**.

运动边界条件:如果流体中有一个固定的边界,或者把一个固定的物体放在运动的流体中,那么在固定的边界上,或固定物体的界面上,理想流体只能沿着它们的切线方向流动,不能穿入到固定的界面里面去. 因此在固定的界面上,沿着界面法线方向的速度必须为零,即在界面上

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}=v_{\mathrm{n}}=0. \tag{2.10}$$

式中 $\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$ 为界面的法线方向. (2.10)式就是流体的运动边界条件.

动力边界条件:流体在流动过程中,往往有一部分界面是自由界面. 在自由界面上,流体的压力必须和外面的压力相同,即在自由界面上

$$p(x,y,z,t)=p_0. \tag{2.11}$$

例如,若流体的自由面和大气接触,则 p_0 即为大气压力;若流体与真空交界,则 $p_0=0$. 这就是流体的动力边界条件.

以上所讨论的理想流体的动力学方程也适用于静力学问题. 流体处于静止状态时,欧拉方程可简化为

$$\boldsymbol{F}=\frac{1}{\rho}\nabla p .$$

用 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 乘上式两端得

$$F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z=\frac{\mathrm{d}p}{\rho} . \tag{2.12}$$

这就是流体静力学的基本方程,再加上物态方程和动力边界条件,就成为流体静力学的完整方程组. 而连续性方程和运动边界条件在静力学问题中已失去意义,不再需要.

§10.3 流线 伯努利方程

欧拉方程是非线性方程,一般情况下很难求解. 在本课程中我们只讨论两种最简单情况下的求解问题——欧拉方程沿流线的伯努利积分和无旋运动的拉格朗日积分. 本节先讨论伯努利积分.

首先要介绍一下流线的概念. 根据流体运动的欧拉描述法,在时刻 t,由(1.2)式可得出流体在空间各点的速度 $\boldsymbol{v}$. 如果我们在流体中画一组曲线,使这组曲线在每一点的切线方向就是此时刻流体在该点的速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向,如图 10.2 所示,这样的一组曲线就叫做流体在 t 时刻的**流线**. 由于任一时刻流体在空间任一点的速度是唯一的,因此所有的流线互不相交.

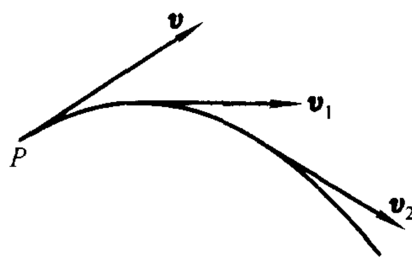


图 10.2

我们给出流线所满足的微分方程. 由于流线的切线方向和速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向一致,因此如果我们限定

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\boldsymbol{j}+\mathrm{d}z\boldsymbol{k}$$

为流线的线元,则 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的方向相同,因此

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}=(v_z\mathrm{d}y-v_y\mathrm{d}z)\boldsymbol{i}+(v_x\mathrm{d}z-v_z\mathrm{d}x)\boldsymbol{j}+(v_y\mathrm{d}x-v_x\mathrm{d}y)\boldsymbol{k}=0 .$$

由此可得

$$\frac{\mathrm{d}x}{v_x}=\frac{\mathrm{d}y}{v_y}=\frac{\mathrm{d}z}{v_z} . \tag{3.1}$$

由于我们已规定上式中的 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$、$\mathrm{d}z$ 是沿流线的微分,因此(3.1)式就是流线所满足的微分方程. 当 v_x、v_y、v_z 已知时,解这组方程即可得到流线方程. 解方程时,时间 t 只是参数,不是自变量.

如果我们在流体中取一条不是流线的闭合曲线,过此曲线上的每一点作流线,这些流线将形成一根管子,称为**流管**,如图 10.3 所示. 应用流管的概念,可将连续性方程表示为

$$\rho v\sigma=\text{常数},$$

式中 σ 是流管的截面积.

流体在运动过程中,每一个流体质点都有自己的运动轨迹. 需要指出,上面所说的流线和轨迹是两种不同性质的曲线,不要把它们混淆起来. 轨迹是同一个质点在不同时刻的空间位置所连成的曲线,而流线则是同一时刻不同流体质点所组成的曲线,一般情况下两者不会重合. 但如果流体作稳定运动,即速度 v 只是空间位置的函数(和时间无关),$\frac{\partial v}{\partial t}=0$,则流线和轨迹是一致的.



图 10.3

【例】 设流体运动的速度函数为

$$v_x = x + t, v_y = -y + t, v_z = 0 .$$

求 $t=0$ 时过 A 点$(-1,-1,0)$的流线及轨迹.

解: 由(3.1)式,流线的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{x+t} = \frac{\mathrm{d}y}{-y+t} .$$

因为 t 是参数,因此上式可直接积分,得

$$(x+t)(-y+t) = c ,$$

式中 c 为积分常数. 以 $t=0, x=-1, y=-1$ 代入,得 $c=-1$. 于是得 $t=0$ 时过 A 点的流线方程为

$$xy = 1 ,$$

这是一条双曲线.

再求轨迹方程. 按定义,流体质点所满足的微分方程为

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x + t, \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -y + t .$$

在运动方程中,t 是自变量,x 和 y 是待求的未知函数. 所以上述方程是两个非齐次的一阶常系数线性方程,它们的解为

$$x = c_1 \mathrm{e}^{t} - t - 1, \quad y = c_2 \mathrm{e}^{-t} + t - 1 .$$

以 $t=0, x=-1, y=-1$ 代入得 $c_1 = c_2 = 0$,于是得 $t=0$ 时过 A 点的流体质点的运动规律为

$$x = -t - 1, \quad y = t - 1 .$$

由此两式消去 t 即得该质点的轨迹方程

$$x + y = -2 .$$

这是一条直线,和上述流线方程完全不同.

但如果是稳定运动,速度函数为

$$v_x = x, \quad v_y = -y, \quad v_z = 0 .$$

则流线方程仍为 $xy=1$,运动方程则变为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -y .$$

从这两式中消去 $\mathrm{d}t$ 得

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = -\frac{\mathrm{d}y}{y} .$$

这就是运动轨迹所满足的微分方程，积分得

$$xy = c\ .$$

由 $t=0$ 时通过 A 点的条件，可决定 $c=1$. 于是得轨迹方程为

$$xy = 1\ .$$

它和流线方程一致. 所以在稳定流动时，轨迹和流线是一致的.

引入流线的概念后，现在我们来讨论欧拉方程沿流线进行积分的问题. 假定流体是正压的，流动是稳定的，并且体力有势，即满足条件

$$\rho = \rho(p)\ ,\ \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = 0,\ \boldsymbol{F} = -\nabla U\ .$$

在这些条件下，我们把欧拉方程(2.4)中的三个方程分别乘以 dx、dy、dz，得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v_x}{\partial x}v_x\,dx + \dfrac{\partial v_x}{\partial y}v_y\,dx + \dfrac{\partial v_x}{\partial z}v_z\,dx + \dfrac{\partial U}{\partial x}dx + \dfrac{1}{\rho}\ \dfrac{\partial p}{\partial x}dx = 0\ ,\\ \dfrac{\partial v_y}{\partial x}v_x\,dy + \dfrac{\partial v_y}{\partial y}v_y\,dy + \dfrac{\partial v_y}{\partial z}v_z\,dy + \dfrac{\partial U}{\partial y}dy + \dfrac{1}{\rho}\ \dfrac{\partial p}{\partial y}dy = 0\ ,\\ \dfrac{\partial v_z}{\partial x}v_x\,dz + \dfrac{\partial v_z}{\partial y}v_y\,dz + \dfrac{\partial v_z}{\partial z}v_z\,dz + \dfrac{\partial U}{\partial z}dz + \dfrac{1}{\rho}\ \dfrac{\partial p}{\partial z}dz = 0\ .\end{cases}$$

将这三个方程式加起来，并限定其空间坐标满足流线方程(3.1)，那么前三项之和变为

$$v_x\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}dx + \frac{\partial v_x}{\partial y}dy + \frac{\partial v_x}{\partial z}dz\right) + v_y\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}dx + \frac{\partial v_y}{\partial y}dy + \frac{\partial v_y}{\partial z}dz\right)$$

$$+ v_z\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}dx + \frac{\partial v_z}{\partial y}dy + \frac{\partial v_z}{\partial z}dz\right) = v_x\,dv_x + v_y\,dv_y + v_z\,dv_z = d\left(\frac{v^2}{2}\right)\ ,$$

第四项之和为

$$\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = dU\ ,$$

最后一项之和为

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right) = \frac{dp}{\rho}\ .$$

于是得

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) + dU + \frac{dp}{\rho} = 0\ ,$$

积分得

$$\frac{1}{2}v^2 + U + \int_l \frac{dp}{\rho(p)} = c_l\ . \tag{3.2}$$

式中的积分是沿流线进行的，因为导出此式时已经用了流线方程(3.1). (3.2)式称为**伯努利(D. Bernoulli)积分**. 必须注意，式中的积分常数 c_l 是对某一条确定的流线 l 而言的. 对不同的流线，一般情况下，c_l 有不同的值.

如果流体是不可压缩的，体力仅为重力，这时(3.2)式可简化为

$$\frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} = c'\ . \tag{3.3}$$

上式中的每一项都是长度的量纲，通常称 $\frac{v^2}{2g}$ 为速度高度，z 为几何高度，$\frac{p}{\rho g}$ 为压力高度，c' 称

这就是运动轨迹所满足的微分方程,积分得

$$xy=c\ .$$

由 $t=0$ 时通过 A 点的条件,可决定 $c=1$. 于是得轨迹方程为

$$xy=1\ .$$

它和流线方程一致. 所以在稳定流动时,轨迹和流线是一致的.

引入流线的概念后,现在我们来讨论欧拉方程沿流线进行积分的问题. 假定流体是正压的,流动是稳定的,并且体力有势,即满足条件

$$\rho=\rho(p),\ \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=0,\ \boldsymbol{F}=-\nabla U\ .$$

在这些条件下,我们把欧拉方程(2.4)中的三个方程分别乘以 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$、$\mathrm{d}z$,得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v_x}{\partial x}v_x\mathrm{d}x+\dfrac{\partial v_x}{\partial y}v_y\mathrm{d}x+\dfrac{\partial v_x}{\partial z}v_z\mathrm{d}x+\dfrac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x=0\ ,\\ \dfrac{\partial v_y}{\partial x}v_x\mathrm{d}y+\dfrac{\partial v_y}{\partial y}v_y\mathrm{d}y+\dfrac{\partial v_y}{\partial z}v_z\mathrm{d}y+\dfrac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y=0\ ,\\ \dfrac{\partial v_z}{\partial x}v_x\mathrm{d}z+\dfrac{\partial v_z}{\partial y}v_y\mathrm{d}z+\dfrac{\partial v_z}{\partial z}v_z\mathrm{d}z+\dfrac{\partial U}{\partial z}\mathrm{d}z+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z=0\ .\end{cases}$$

将这三个方程式加起来,并限定其空间坐标满足流线方程(3.1),那么前三项之和变为

$$\begin{aligned}&v_x\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v_x}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial v_x}{\partial z}\mathrm{d}z\right)+v_y\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v_y}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial v_y}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\\&+v_z\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v_z}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial v_z}{\partial z}\mathrm{d}z\right)=v_x\mathrm{d}v_x+v_y\mathrm{d}v_y+v_z\mathrm{d}v_z=\mathrm{d}\left(\frac{v^2}{2}\right)\ ,\end{aligned}$$

第四项之和为

$$\frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial U}{\partial z}\mathrm{d}z=\mathrm{d}U\ ,$$

最后一项之和为

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z\right)=\frac{\mathrm{d}p}{\rho}\ .$$

于是得

$$\mathrm{d}\left(\frac{v^2}{2}\right)+\mathrm{d}U+\frac{\mathrm{d}p}{\rho}=0\ ,$$

积分得

$$\frac{1}{2}v^2+U+\int_c\frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)}=c_l\ . \tag{3.2}$$

式中的积分是沿流线进行的,因为导出此式时已经用了流线方程(3.1). (3.2)式称为**伯努利(D. Bernoulli)积分**. 必须注意,式中的积分常数 c_l 是对某一条确定的流线 l 而言的. 对不同的流线,一般情况下,c_l 有不同的值.

如果流体是不可压缩的,体力仅为重力,这时(3.2)式可简化为

$$\frac{v^2}{2g}+z+\frac{p}{\rho g}=c'\ . \tag{3.3}$$

上式中的每一项都是长度的量纲,通常称$\dfrac{v^2}{2g}$为速度高度,z 为几何高度,$\dfrac{p}{\rho g}$为压力高度,c'称

为总高度，其物理意义为：同一条流线上，速度高度、几何高度和压力高度三个高度之和对所有流体质点来讲，具有相同的数值．如图 10.4 所示，若在速度场中取一流线，它离参考水平面的高度为 z；从此流线开始，竖直向上取长为$\frac{p}{\rho g}$的线段，连接各线段的上端点得一曲线，这条曲线称为**压力线**；从压力线开始再向上截取长为$\frac{v^2}{2g}$的线段，再将其上端点连接起来，根据(3.3)式，此线必为一条与参考水平面平行的直线，它称为**总高度线**(即**等能线**)．

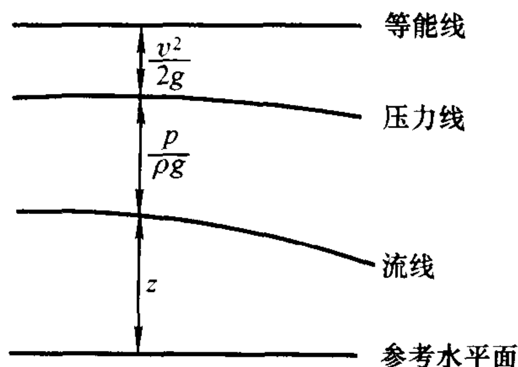


图 10.4

在我们的推导中，(3.2)式是由欧拉方程沿流线进行积分得出的，(3.3)式是(3.2)式的一种特殊情况．但在历史上(3.3)式早于(3.2)式．欧拉方程建立于 1755 年，而(3.3)式在 1738 年已由伯努利建立，因此称为伯努利方程．(3.3)式可以利用流体在管道中流动时能量守恒建立，其中$\frac{v^2}{2}$为单位质量的动能，gz 为势能，$\frac{p}{\rho}$为压力能．普通物理教材中通常也是这样导出伯努利方程的．

伯努利方程有广泛的应用．下面以理想气体作绝热压缩为例，说明伯努利积分及其应用．为此先用绝热方程$\frac{p}{\rho^\gamma}=c$ 作出(3.2)中的积分：

$$\int_c \frac{\mathrm{d}p}{\rho}=\int\left(\frac{c}{p}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\mathrm{d}p=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}. \tag{3.4}$$

在大多数气体动力学问题中，气体的重力可略去不计，这时(3.2)式变为

$$\frac{v^2}{2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}=c_l.$$

为决定上式中的常数 c_l，取 $v=0$ 时的压力和密度值为

$$p=p_0,\ \rho=\rho_0,$$

最后得

$$v^2=\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]. \tag{3.5}$$

从(3.5)式可知，当 $p=0$ 时，气体流动的速度达到极大值：

$$v_{\max}^2=\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}.$$

因此(3.5)式又可表示为

$$v^2=v_{\max}^2\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right].$$

(3.5)式建立了流速和压力的关系，可用来导出超声速和亚声速流动的一些基本结论．

大家知道，声音是在空气中绝热传播的压缩波．根据波动方程的解，知声速 u 的值为$\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\text{绝热}}}$．将气体的绝热方程代入得

$$u^2 = \frac{\gamma p}{\rho}.$$

利用上式,(3.5)式可改写为

$$\frac{v^2}{2} + \frac{u^2}{\gamma - 1} = \frac{v_{\max}^2}{2}. \tag{3.6}$$

从上式可以看到,气体流动时,沿着流线速度增加时,声速就减小;速度减小时,声速就增加.流速和声速的比称为**马赫**(March)**数** Ma:

$$Ma = \frac{v}{u}. \tag{3.7}$$

$Ma>1$ 的流动称为**超声速流动**,$Ma<1$ 的流动称为**亚声速流动**. 因为流体沿流线的速度变化可从零变到 $v_{\max}$,相应的声速可从 $u_0=\sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$ 变到零,因此马赫数可从零变到无穷大.

利用马赫数,我们可把方程(3.6)表示为

$$\frac{p}{p_0} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}}, \tag{3.8}$$

和

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}}. \tag{3.9}$$

由(3.9)式可以估计出把气体当作不可压缩流体所应该满足的条件. 从(3.9)式可知,$\frac{\rho}{\rho_0}$ 随 Ma 的增加单调下降,但下降的速率在各区间是不一样的. 在 Ma 较小和 Ma 很大时,$\frac{\rho}{\rho_0}$ 随 Ma 的变化平缓. 只有在 $0.5<Ma<2.0$ 区间,$\frac{\rho}{\rho_0}$ 随 Ma 的变化比较显著,如图 10.5 所示. 因此在 $Ma<0.5$ 时,把气体当作不可压缩流体(即认为 $\rho\approx\rho_0$)所带来的误差并不太大. 例如,当 $Ma=0.2$,即 $v\approx 68$ m/s 时,$\frac{\rho}{\rho_0}\approx 0.98$;$Ma=0.5$,$v\approx 170$ m/s 时,$\frac{\rho}{\rho_0}\approx 0.86$. 所以几米每秒或几十米每秒的低速气流,一般都可作为不可压缩流体处理. 但必须记住,上述估计是根据伯努利方程得出的,条件是流动必须稳定,因此上述结论只对稳定流动适用. 对于不稳定流动,即使 v 很小,也必须认为是可压缩的.

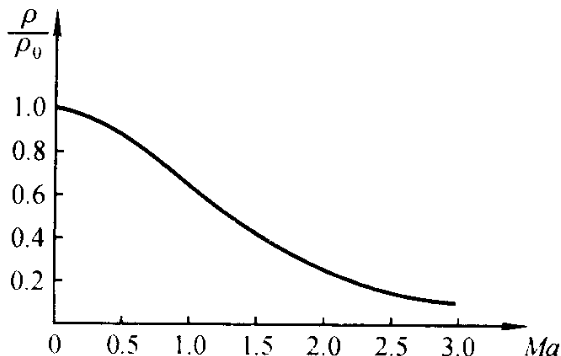


图 10.5

§10.4 无旋运动 拉格朗日积分

首先介绍无旋运动的概念. 流体的运动和质点及刚体的运动不同,质点只有平动,刚体只有平动和转动,流体除了平动和转动外,还可以有形变. 因此流体的速度$\boldsymbol{v}$一般同时包含三种运动成分:

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_{平}+\boldsymbol{v}_{转}+\boldsymbol{v}_{形}. \tag{4.1}$$

形变是流体运动的特征,没有形变,流体就成为刚体或质点了,因此对于流体来说,$\boldsymbol{v}_{形}$总是一定存在的,$\boldsymbol{v}_{平}$和$\boldsymbol{v}_{转}$则可以存在,也可以不存在. $\boldsymbol{v}_{转}=0$的运动称为**无旋运动**,反之则称为**有旋运动**. 这两种运动在性质上有很大的差别,处理无旋运动比较简单.

如果已知流体的速度函数$\boldsymbol{v}$,怎样判断它是有旋运动还是无旋运动呢?为此我们考察如图10.6所示的流体中P点及其邻近的Q点的运动情况. 设时刻t时P点的位置为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

Q点的位置为

$$\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{r}=(x+\delta x)\boldsymbol{i}+(y+\delta y)\boldsymbol{j}+(z+\delta z)\boldsymbol{k}.$$

经过时间$\mathrm{d}t$后,P点和Q点分别到达了新的位置P'点和Q'点,则根据定义,

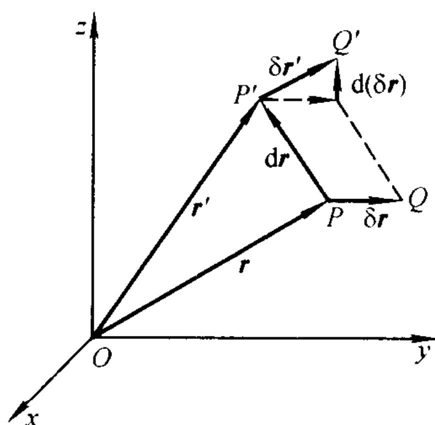


图 10.6

$$\boldsymbol{v}_P=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k},$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_Q&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{r})=\boldsymbol{v}_P+\delta\boldsymbol{v}_P\\&=\boldsymbol{v}_P+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial y}\delta y+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial z}\delta z\\&=\boldsymbol{v}_P+\boldsymbol{\omega}\times\delta\boldsymbol{r}+\overset{\rightrightarrows}{s}\cdot\delta\boldsymbol{r}.\end{aligned}\tag{4.2}$$

式中

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\nabla\times\boldsymbol{v}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right],\tag{4.3}$$

$$\overset{\rightrightarrows}{s}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial v_x}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_y}{\partial x}+\dfrac{\partial v_x}{\partial y}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_x}{\partial z}+\dfrac{\partial v_z}{\partial x}\right)\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_x}{\partial y}+\dfrac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \dfrac{\partial v_y}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_y}{\partial z}+\dfrac{\partial v_z}{\partial y}\right)\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_z}{\partial x}+\dfrac{\partial v_x}{\partial z}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_z}{\partial y}+\dfrac{\partial v_y}{\partial z}\right) & \dfrac{\partial v_z}{\partial z}\end{pmatrix}.$$

如果流体存在刚性转动,其角速度为$\boldsymbol{\omega}$,则由第四章的讨论可知,$\boldsymbol{v}_P$和$\boldsymbol{v}_Q$之间存在关系式

$$\boldsymbol{v}_Q=\boldsymbol{v}_P+\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{PQ}=\boldsymbol{v}_P+\boldsymbol{\omega}\times\delta\boldsymbol{r}.$$

将上式和(4.2)式比较,并对照(4.1)式,可知

$$\boldsymbol{v}_{转}=\boldsymbol{\omega}\times\delta\boldsymbol{r},$$

并且

$$v_{平}=v_P,\quad v_{形}=\overrightarrow{\overrightarrow{s}}\cdot\delta\boldsymbol{r}\ .$$

当 $\boldsymbol{\omega}=0$ 时,流体在 P 点附近不存在刚性转动. 因此由(4.3)式知流体作无旋运动的条件是:在空间每一点

$$\nabla\times\boldsymbol{v}=0\ . \tag{4.4}$$

对于无旋运动,利用上式可把欧拉方程写成另一易于直接进行积分的形式. 为此把

$$v^2=v_x^2+v_y^2+v_z^2$$

的两边对 x 求导数,得

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial x}-v_y\frac{\partial v_y}{\partial x}-v_z\frac{\partial v_z}{\partial x}\ .$$

将它代入欧拉方程(2.4)中的第一式,得

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2}\right)-v_y\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)+v_z\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)=F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\ .$$

对于无旋运动,上式中的

$$\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}=2\omega z=0,\quad \frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}=2\omega y=0\ .$$

于是得

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2}\right)=F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\ .$$

类似地可得

$$\frac{\partial v_y}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v^2}{2}\right)=F_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\ ,$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v^2}{2}\right)=F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\ .$$

将这三式合并起来成为矢量方程:

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{v^2}{2}\right)=\boldsymbol{F}-\frac{\nabla p}{\rho}\ . \tag{4.5}$$

这就是欧拉方程在无旋运动时的另一种表示式.

下面再讨论方程(4.5)的积分. 和伯努利积分一样,仍然假定流体是正压的($\rho=\rho(p)$),令

$$P=\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho}=\int\frac{\nabla p}{\rho}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\ ,$$

得

$$\nabla P=\frac{\nabla p}{\rho}\ .$$

体力仍然有势,$\boldsymbol{F}=-\nabla U$. 并且由于是无旋运动,由(4.4)式,我们可利用恒等式 $\nabla\times\nabla\varphi=0$,引入标量函数 φ 来代替速度 $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{v}=\nabla\varphi\ . \tag{4.6}$$

这样(4.5)式就可写成全微分的形式:

$$\nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{v^2}{2}+U+P\right)=0\ .$$

积分得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{v^2}{2}+U+\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho}=F(t)\ . \tag{4.7}$$

由于被积函数含有时间 t,而积分是对空间进行的,因此上式中的积分常数 F 是 t 的函数.

(4.7)式称为**拉格朗日积分**. 如何利用拉格朗日积分来求流体的 $\boldsymbol{v}(x,y,z,t)$、$\rho(x,y,z,t)$和 $p(x,y,z,t)$呢?

(4.7)式可改写为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]+U+\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho}=F\ . \tag{4.8}$$

式中 U 是已知的,未知函数只是 φ、ρ 和 p. (4.8)式只有一个方程,还缺两个方程应由物态方程和连续性方程给出. 利用 $\boldsymbol{v}=\nabla\varphi$,可将连续性方程表示为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\varphi\cdot\nabla\rho+\rho\nabla^2\varphi=0\ . \tag{4.9}$$

由(4.8)、(4.9)和物态方程 $\rho=\rho(p)$以及边界条件和初始条件,就可求出 φ、ρ 和 p,然后再由 $\boldsymbol{v}=\nabla\varphi$ 求得 $\boldsymbol{v}$,这样问题就全部解决了.

如果流体的运动不但无旋,而且是稳定的,则 φ、ρ 和 p 都不是 t 的显函数,$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$,积分常数 F 也和 t 无关. 这时(4.7)式可简化为

$$\frac{1}{2}v^2+U+\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho}=c\ , \tag{4.10}$$

它和伯努利积分完全相同. 但伯努利积分是沿流线进行的,(3.2)中的积分常数 c_l 一般随流线的不同而不同. 但(4.10)中,常数 c 在整个空间都是一样的. 因此我们得到这样的结论:对于稳定流动,伯努利积分的常数 c_l 对所有的流线都相同.

如果流体的运动不但是无旋和稳定的,而且还是不可压缩的,这时连续性方程(4.9)简化为

$$\nabla^2\varphi=0\ , \tag{4.11}$$

即 φ 满足拉普拉斯方程. 这种情况下求解大为简化,整个解题过程分成为三个独立的步骤:首先由边界条件解拉普拉斯方程求得 φ;其次由 φ 通过 $\boldsymbol{v}=\nabla\varphi$ 求出 $\boldsymbol{v}$;最后将 $\boldsymbol{v}$ 代入拉格朗日积分求出 p.

§10.5　理想流体绕圆柱的流动　达朗贝尔佯谬

现在我们利用上节所得的结果,来解一个简单的具体问题. 设理想、不可压缩的流体充满整个空间,以稳定而无旋的方式沿负 x 轴的方向流动,在无穷远处其速度大小为 u_0. 如果在流体中放置一半径为 a 的无限长圆柱体,其轴线和 z 轴重合(如图 10.7 所示),求流体中速度和压力的分布.

根据对称性的考虑,流体的运动在 z 方向必是均匀的. 因此上述问题化为一个平面问题. 如上所述,首先需要解拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0\ ,$$

或

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0 . \tag{5.1}$$

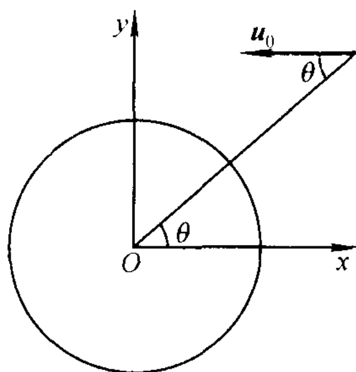


图 10.7

边界条件为

$$v_r(\infty) = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right|_{r\to\infty} = -u_0\cos\theta , \tag{5.2}$$

$$v_n = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right|_{r=a} = 0 . \tag{5.3}$$

方程(5.1)可用分离变量法求解. 令

$$\varphi(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta) , \tag{5.4}$$

将(5.4)代入(5.1)得

$$\begin{cases} \Theta'' + n^2\Theta = 0 , \\ r^2R'' + rR' - n^2R = 0 . \end{cases}$$

这是两个常微分方程,求出其解代入(5.4)得 φ 的通解为

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[(A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta)r^n + (C_n\cos n\theta + D_n\sin n\theta)r^{-n}\right] . \tag{5.5}$$

将上式对 r 求微商得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} n(A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta)r^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n(C_n\cos n\theta + D_n\sin n\theta)r^{-n-1} . \tag{5.6}$$

将边界条件(5.2)和(5.3)代入上式,可解得

$$A_1 = -u_0 , C_1 = -a^2u_0 ,$$

其余 A_n、B_n、C_n、D_n 均为零. 于是得

$$\varphi(r,\theta) = -u_0\cos\theta\left(r + \frac{a^2}{r}\right) . \tag{5.7}$$

其次,求速度 $\boldsymbol{v}$. 由(5.7)式得

$$\begin{cases} v_r = \dfrac{\partial \varphi}{\partial r} = -u_0\cos\theta\left(1 - \dfrac{a^2}{r^2}\right) , \\ v_\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta} = u_0\sin\theta\left(1 + \dfrac{a^2}{r^2}\right) . \end{cases} \tag{5.8}$$

而

$$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = u_0^2\left[\cos^2\theta\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)^2 + \sin^2\theta\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)^2\right] . \tag{5.9}$$

最后求压力 p. 为简单起见,假定体力可以忽略不计,并假定在无穷远处 $p = p_0$. 于是由拉格朗日积分得

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \frac{\rho}{2}(u_0^2 - v^2) \\ &= p_0 + \frac{1}{2}\rho u_0^2\left[1 - \cos^2\theta\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)^2 - \sin^2\theta\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)^2\right] . \end{aligned} \tag{5.10}$$

下面我们讨论流体对圆柱体的作用力. 从直观上看,在流动着的流体中放置一固定物体,流体必然会对此物体施加一个力,其方向和流体流动方向相同,实验表明也确实如此. 但如果我们按照上述所得结果作理论计算,却得出流体作用在圆柱体上的合力为零的结论! 计

算过程如下. 先利用(5.10)式求出流体作用在圆柱体表面上的压力 p_a：

$$p_a = p|_{r=a} = p_0 + \frac{1}{2}\rho u_0^2(1 - 4\sin^2\theta) . \tag{5.11}$$

知道了 p_a,就可计算流体作用在单位长圆柱体上的合力. 如图 10.8 所示,作用在高为 1,弧长为 ds 的面积元上的力为

$$\begin{cases} dF_x = -p_a\cos\theta ds = -ap_a\cos\theta d\theta , \\ dF_y = -p_a\sin\theta ds = -ap_a\sin\theta d\theta . \end{cases}$$

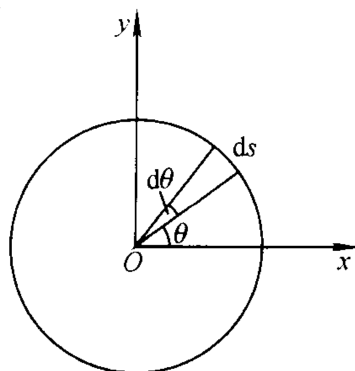


图 10.8

将(5.11)代入上式,对整个表面积进行积分得

$$F_x = -a\left(p_0 + \frac{1}{2}\rho u_0^2\right)\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta + 2a\rho u_0^2\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos\theta d\theta = 0 ,$$

$$F_y = -a\left(p_0 + \frac{1}{2}\rho a u_0^2\right)\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta + 2a\rho u_0^2\int_0^{2\pi}\sin^3\theta d\theta = 0 .$$

这就表明流体作用在整个圆柱体上的合力为零. 这一结论不但对圆柱是如此,对其他任何形状的物体也有同样的结论. 这一理论和实验的矛盾被称为**达朗贝尔佯谬**,其原因是忽略了实际流体具有的粘滞性. 如果考虑了流体和圆柱体表面之间具有切向应力,即摩擦力,这一矛盾就可消除.

§10.6 粘滞流体的运动方程

以上讨论的都是理想流体,只是近似地适用于大部分实际流体. 由于理想流体忽略了粘滞性,在某些问题上所得结论可能会和实际差异很大. 达朗贝尔佯谬就是一例. 本节我们来讨论粘滞流体的运动方程.

对于粘滞流体,作用在流体表面上的面力,除了法向应力(压力)p 外,还有切向应力(摩擦力),使动力学方程的推导变得比较复杂. 本书限于篇幅,将略去推导过程,只给出结果. 需要了解推导的读者,可参阅流体力学的有关教程.

不可压缩粘滞流体的动力学方程具有以下形式：

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = \frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\eta}{\rho}\nabla^2\boldsymbol{v} . \tag{6.1}$$

式中 η 为流体的动力粘度,$\nu = \frac{\eta}{\rho}$则为运动粘度. 下面是几种液体和气体在 20 ℃ 时的 η 和 ν 的值：

	η/(Pa·s)	ν/(10^{-4} m^2/s)
水	0.001 0	0.010
空气	1.8×10^{-5}	0.150
酒精	0.001 8	0.022
甘油	0.85	6.8
汞	0.001 56	0.001 2

方程(6.1)称为**纳维叶－斯托克斯**(Navier-Stokes)**方程**. 对于理想流体,$\eta = 0$,纳维叶－斯托克斯方程回到理想流体的欧拉方程. 所以$\frac{\eta}{\rho}\nabla^2\boldsymbol{v}$ 是作用在单位质量的粘滞力.

粘滞流体的运动边界条件也和理想流体有所不同. 固体表面和任何真实流体之间总存

在着分子亲和力,使紧靠固体表面的一层流体完全不动. 因此固体边界面上的一层流体速度必为零:

$$\boldsymbol{v} = 0 . \tag{6.2}$$

即不但法向速度 $v_n = 0$,而且切向速度 $v_t = 0$. 如果固体的边界面是运动的,这时边界条件则为界面上流体的速度必须与界面的运动速度相等.

粘滞流体作用在固定表面单位面积上的力为

$$P_i = \quad pn_i + \sum_{k=1}^{3} \sigma'_{ik} n_k , \; i = 1,2,3 , \tag{6.3}$$

式中

$$\boldsymbol{n} = n_1 \boldsymbol{i} + n_2 \boldsymbol{j} + n_3 \boldsymbol{k} ,$$

为固体表面的外法线方向(对流体来讲是内法线方向),

$$\sigma'_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right), \; i,k = 1,2,3 . \tag{6.4}$$

(6.3)式右边第一项是流体正常压力,第二项是施于表面的摩擦力.

若所讨论的边界面是两种不相混和的流体的分界面,则在此分界面上必须满足的条件是:第一,两种流体的速度必须相等;第二,相互作用的力必须数值相等而方向相反. 第二个条件又可写为

$$- p^{(1)} n_i + \sum_{k=1}^{3} \sigma'^{(1)}_{ij} n_k = - p^{(2)} n_i + \sum_{k=1}^{3} \sigma'^{(2)}_{ik} n_k . \tag{6.5}$$

式中上角标(1)和(2)分别表示第 1 种流体和第 2 种流体.

(6.1)式是矢量方程,(6.3)和(6.4)是张量表示式. 求解时要采用一种具体的坐标把它们写成标量的形式. 下面分别给出在柱面坐标和球面坐标中 σ'_{ik} 和纳维叶－斯托克斯方程及连续性方程 $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$ 的表示式.

在柱坐标 R、φ、z 中,σ'_{ik} 为:

$$\sigma'_{RR} = 2\eta \frac{\partial v_R}{\partial R} ,$$

$$\sigma'_{\varphi\varphi} = 2\eta \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_R}{R} \right) ,$$

$$\sigma'_{zz} = 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z} ,$$

$$\sigma'_{R\varphi} = \eta \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v_R}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial R} - \frac{v_\varphi}{R} \right) ,$$

$$\sigma'_{\varphi z} = \eta \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \right) ,$$

$$\sigma'_{zR} = \eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial R} + \frac{\partial v_R}{\partial z} \right) ;$$

纳维叶－斯托克斯方程为

$$\frac{\partial v_R}{\partial t} + v_R \frac{\partial v_R}{\partial R} + \frac{v_\varphi}{R} \frac{\partial v_R}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_R}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{R}$$
$$= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial R} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_R}{\partial R^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v_R}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_R}{\partial z^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial v_R}{\partial R} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{v_R}{R^2} \right) ,$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_R \frac{\partial v_\varphi}{\partial R} + \frac{v_\varphi}{R}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_R v_\varphi}{R}$$

$$= -\frac{1}{\rho R}\frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial R^2} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial v_\varphi}{\partial R} + \frac{2}{R^2}\frac{\partial v_R}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{R^2}\right),$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_R \frac{\partial v_z}{\partial R} + \frac{v_\varphi}{R}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial R^2} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial v_z}{\partial R}\right);$$

连续性方程为：

$$\frac{\partial v_R}{\partial R} + \frac{1}{R}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_R}{R} = 0 .$$

在球坐标 r、φ、θ 中，σ'_{ik} 为：

$$\sigma'_{rr} = 2\eta\frac{\partial v_r}{\partial r},$$

$$\sigma'_{\varphi\varphi} = 2\eta\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta\cot\theta}{r}\right),$$

$$\sigma'_{\theta\theta} = 2\eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right),$$

$$\sigma'_{r\theta} = \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right),$$

$$\sigma'_{\theta\varphi} = \eta\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} - \frac{v_\varphi\cot\theta}{r}\right),$$

$$\sigma'_{\varphi r} = \eta\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r}\right);$$

纳维叶－斯托克斯方程为：

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r}$$

$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rv_r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v_r}{\partial^2 \varphi^2} + \right.$$

$$\left.\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2\cot\theta}{r^2}v_\theta\right],$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\varphi^2\cot\theta}{r}$$

$$= -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rv_\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \varphi^2} + \right.$$

$$\left.\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta}\right],$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + \frac{v_\theta v_\varphi\cot\theta}{r}$$

$$= -\frac{1}{\rho r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rv_\varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \right.$$

$$\left.\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2\sin^2\theta}\right];$$

连续性方程为：

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{2v_r}{r}+\frac{v_\theta\cot\theta}{r}=0 .$$

§ 10.7 泊肃叶公式和斯托克斯公式

我们来研究不可压缩粘滞流体运动的一个简单例子，目的有二：一是举例说明纳维叶－斯托克斯方程具体求解的方法步骤，二是给出两个很有实用价值的流体力学公式——泊肃叶公式和斯托克斯公式的推导，并附带解释达朗贝尔佯谬.

首先我们研究不可压缩流体沿管道的稳定流动. 管道的截面可取任意形状，但沿着轴线处处相同. 对于不可压缩的稳定流动，速度方向恒沿管道轴线方向，但由于粘滞性，从管道中心到管道边上存在速度梯度. 因此如取管道轴线为 z 轴，速度 $\boldsymbol{v}$ 与 z 无关，可表示为

$$\boldsymbol{v}=v(x,y)\boldsymbol{k}.$$

由此可得

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=0 .$$

流体能作稳定流动，是由于管道两端存在稳定的压力差 Δp. 显然管道内的压力只是 z 的函数，和 x、y 无关. 假定管道长为 l，我们得

$$\frac{1}{\rho}\nabla p=\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\boldsymbol{k}=\frac{\Delta p}{\rho l}\boldsymbol{k} .$$

因此纳维叶－斯托克斯方程变为

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-\frac{\Delta p}{\eta l} . \tag{7.1}$$

这是一个二维 $\nabla^2 v=$ 常数型的方程，在一定的边界条件下可按常规方法求解. 为简单起见，我们讨论半径为 a 的圆形管道. 这时将(7.1)化为平面极坐标来解比较方便. 根据对称性的考虑，速度 v 只是 r 的函数，因此方程(7.1)可改写为

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)=-\frac{\Delta p}{\eta l} . \tag{7.2}$$

这个方程可直接积分，得

$$v=-\frac{\Delta p}{4\eta l}r^2+c_1\ln r+c_2 .$$

常数 c_1、c_2 可由边界条件来决定. 现在的边界条件是：在管壁上速度为零，在管子中心速度有限，即

$$v\big|_{r=a}=0 ,$$
$$v\big|_{r=0}=\text{有限} .$$

据此可定出 $c_1=0$，$c_2=\dfrac{\Delta p}{4\eta l}a^2$. 最后得

$$v=\frac{\Delta p}{4\eta l}(a^2-r^2) . \tag{7.3}$$

这是一个抛物线方程，表明速度在半径方向是按抛物线分布的. 下面我们来计算每秒钟通过管道的流体质量. 单位时间内通过半径为 r 和 $r+\mathrm{d}r$ 的环形面元的流量为 $\rho 2\pi r v\mathrm{d}r$，因此总

的流量为

$$Q = 2\pi\rho\int_0^a rv\mathrm{d}r .$$

将(7.3)代入得

$$Q = \frac{\pi\Delta p}{8\nu l}a^4 . \qquad (7.4)$$

上式表明流量正比于管道半径的四次方．这个计算流量的公式称为**泊肃叶**(J. L. Poiseuille, 1799—1869)**公式**.

再来计算管壁所受到的摩擦力．由(6.3)式，单位面积管壁所受的摩擦力为

$$P_z = -pn_z + \sum_k \sigma'_{zk}n_k \qquad (r = a) .$$

在管壁处 $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{e}_r$，所以

$$P_z = -\sigma'_{zr} = -\eta\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right) = -\eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} \qquad (r = a).$$

将(7.3)式代入得

$$P_z = \frac{a\Delta p}{2l} .$$

管壁的总面积为 $2\pi al$．所以管壁所受的总摩擦力为

$$P = \pi a^2\Delta p . \qquad (7.5)$$

实际上这个结论可直接从截面为 πa^2 的管道两端所受的压力差为 Δp 得出．它证明了我们以上对问题的分析处理是正确的．

作为粘滞流体稳定流动的第二个例子，我们来推导第七章(1.4)式——斯托克斯阻尼公式．我们暂时不考虑重力，讨论半径为 a 的小球在阻尼介质中作匀速运动时所受的力．其基本方法和上面第一个例子一样，先解纳维叶－斯托克斯方程，求出流体中 v 和 p 的分布，然后求出球面上的 p 值，最后对整个球面积分，即得流体对小球的总作用力，减去浮力就是小球在流体中运动的阻力．

假定流体相对小球来说是无限大．根据力学相对性原理，我们可把小球在无限大流体中以等速 $\boldsymbol{u}_0$ 作直线运动的问题，换成为小球静止不动，流体从无穷远处具有速度 $-\boldsymbol{u}_0$ 的绕流问题．这样变换的好处是：后者是稳定流动，纳维叶－斯托克斯方程中的 $\frac{\partial v}{\partial t}$ 一项可不出现，而前者是不稳定流动，$\frac{\partial v}{\partial t}$ 项不能丢掉．小球在阻尼介质中运动的速度很小，特别是化为绕流问题后，由于小球边界上的速度为零，因此我们可以假定至少在小球附近的区域，速度 v 是小量．因此在纳维叶－斯托克斯方程中，非线性项 $(v\cdot\nabla)v$ 与其他项相比是二级小量，可以忽略．这样流体的运动方程可简化为

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2 v = 0 , \\ \nabla\cdot v = 0 . \end{cases} \qquad (7.6)$$

以 $\boldsymbol{u}_0$ 方向为极轴取球极坐标．根据对称性的考虑，速度 v 在 $\boldsymbol{e}_\varphi$ 方向的分量应为零，其大小只和 r、θ 有关，与 φ 无关，压力 p 也一样．即

$$v_r = v_r(r、\theta),\ v_\theta = v_\theta(r、\theta),\ v_\varphi = 0,\ p = p(r、\theta) .$$

因此在球坐标下方程(7.6)的具体表示式为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial p}{\partial r}=\eta\left(\dfrac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v_r}{\partial\theta^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial v_r}{\partial r}+\dfrac{\cot\theta}{r^2}\dfrac{\partial v_r}{\partial\theta}-\dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial\theta}-\dfrac{2v_r}{r^2}-\dfrac{2\cot\theta}{r^2}v_\theta\right),\\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial p}{\partial\theta}=\eta\left(\dfrac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v_\theta}{\partial\theta^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial r}+\dfrac{\cot\theta}{r^2}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial v_r}{\partial\theta}-\dfrac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta}\right),\\ \dfrac{\partial v_r}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\dfrac{2v_r}{r}+\dfrac{v_\theta\cot\theta}{r}=0.\end{cases}\tag{7.7}$$

边界条件为:在球面上速度为零,在无穷远处为 $-\boldsymbol{u}_0$,即

$$\begin{cases}v_r\big|_{r=a}=0, & v_\theta\big|_{r=a}=0,\\ v_r\big|_{r\to\infty}=u_0\cos\theta, & v_\theta\big|_{r\to\infty}=-u_0\sin\theta.\end{cases}\tag{7.8}$$

下面的工作就是在边界条件(7.8)下解方程组(7.7).

根据 v_r 和 v_θ 在无穷远处的性质,我们可假定 v_r、v_θ 和 p 具有下面的形式:

$$\begin{cases}v_r(r,\theta)=R(r)\cos\theta,\\ v_\theta(r,\theta)=-\Theta(r)\sin\theta,\\ p(r,\theta)=\eta P(r)\cos\theta+p_0.\end{cases}\tag{7.9}$$

将(7.9)代入(7.7)和(7.8),得

$$\begin{cases}R''+\dfrac{2}{r}R'-\dfrac{4}{r^2}(R-\Theta)=P',\\ \Theta''+\dfrac{2}{r}\Theta'+\dfrac{2}{r^2}(R-\Theta)=\dfrac{P}{r},\\ R'+\dfrac{2}{r}(R-\Theta)=0.\end{cases}\tag{7.10}$$

和

$$\begin{cases}R\big|_{r=a}=0,\ \Theta\big|_{r=a}=0,\\ R\big|_{r\to\infty}=u_0,\ \Theta\big|_{r\to\infty}=u_0.\end{cases}\tag{7.11}$$

在(7.10)中消去 Θ 和 P,可得 R 所满足的微分方程为

$$r^3R''''+8r^2R'''+8rR''-8R'=0.\tag{7.12}$$

这个方程的通解为

$$R=\frac{c_1}{r^3}+\frac{c_2}{r}+c_3+c_4r^2.\tag{7.13}$$

将(7.13)代回(7.10)中可得 Θ 和 P 的通解为

$$\Theta=-\frac{c_1}{2r^3}+\frac{c_2}{2r}+c_3+2c_4r^2,\tag{7.14}$$

$$P=\frac{c_2}{r^2}+10c_4r.\tag{7.15}$$

将边界条件(7.11)代入(7.13)和(7.14)可得

$$c_2=\frac{1}{2}a^3u_0,\ c_2=-\frac{3}{2}au_0,$$

$$c_3=u_0,\qquad c_4=0.$$

于是得

$$\begin{cases} R = u_0\left(\dfrac{a^3}{2r^3} - \dfrac{3a}{2r} + 1\right), \\ \Theta = u_0\left(-\dfrac{a^3}{4r^3} - \dfrac{3a}{4r} + 1\right), \\ P = -\dfrac{3a}{2r^2}u_0. \end{cases} \tag{7.16}$$

将(7.16)代入(7.9),最后得

$$\begin{cases} v_r = u_0\cos\theta\left(1 - \dfrac{3a}{2r} + \dfrac{a^3}{2r^3}\right), \\ v_\theta = -u_0\sin\theta\left(1 - \dfrac{3a}{4r} - \dfrac{a^3}{4r^3}\right), \end{cases} \tag{7.17}$$

$$p = p_0 - \frac{3a}{2r^2}\eta u_0\cos\theta . \tag{7.18}$$

以上的讨论没有考虑重力. 现在再计入重力. 设重力的方向和 $\boldsymbol{u}_0$ 方向的相反,它相当于小球在重力场中自由下落的情况. 这时流体的运动方程是:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{g} + \nu\nabla^2\boldsymbol{v} = 0, \\ \nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0, \end{cases} \tag{7.19}$$

边界条件不变. 将(7.19)和(7.6)比较,可知只要在以上的结果中令

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p \to -\frac{1}{\rho}\nabla p_1 = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{g},$$

即可得到方程(7.19)的解. 如图 10.9 所示,令

$$p_1 = -\rho gr\cos\theta + p, \tag{7.20}$$

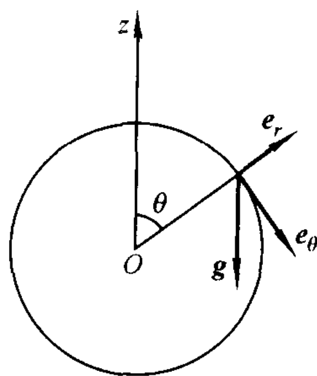


图 10.9

即可得

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p_1 = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{g}.$$

由此我们可以得出结论:计入重力后,v_r 和 v_θ 不变,仍为(7.17),而由(7.20)式,压力则变为

$$p = p_0 - \left(\rho gr + \frac{3a}{2r^2}\eta u_0\right)\cos\theta . \tag{7.21}$$

现在求流体作用在小球上的力. 在球面上 $n_r = -1, n_\theta = n_\varphi = 0$,因此由(6.3)式,小球表面单位面积上所受的力为

$$P_r = -p - \sigma'_{rr},\ P_\theta = -\sigma'_{\theta r},\ P_\varphi = -\sigma'_{\varphi r}.$$

由(7.17)可得

$$\sigma'_{rr} = 2\eta\frac{\partial v_r}{\partial r}\bigg|_{r=a} = 0,$$

$$\sigma'_{r\theta} = \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right)\bigg|_{r=a} = \frac{3\eta}{2a}u_0\sin\theta,$$

$$\sigma'_{r\varphi} = 0.$$

最后得

$$P_r = -p\big|_{r=a},\ P_\theta = -\frac{3\eta}{2a}u_0\sin\theta,\ P_\varphi = 0\ . \tag{7.22}$$

小球所受的合力必和 $\boldsymbol{u}_0$ 的方向一致. 将 P_r 和 P_θ 在 $\boldsymbol{u}_0$ 方向投影,并对整个小球表面积分,即得流体作用在小球上的合力 F:

$$\begin{aligned}F &= \int_0^\pi (P_r\cos\theta - P_\theta\sin\theta)2\pi a^2\sin\theta\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{4\pi a^3}{3}\rho g + 6\pi a\eta u_0\ .\end{aligned} \tag{7.23}$$

式中第一项是小球在流体中所受到的浮力,第二项即为小球运动时所受到的阻力. 此即第七章(1.4)式斯托克斯公式. 对于理想流体,$\eta=0$,阻力为零. 所以达朗贝尔佯谬在考虑流体的粘滞性后即可消失.

以上的结果是在全空间都略去非线性项$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$的近似下得出来的. 但在离小球较远的地方,这一项和其他项比较不一定能忽略. 因为这时

$$v_r \approx u_0\cos\theta\left(1-\frac{3a}{2r}\right),\ v_\theta \approx -u_0\sin\theta\left(1-\frac{3a}{4r}\right)\ .$$

所以$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$的数量级为$\frac{u_0^2 a}{r^2}$. 而由(7.18),$\frac{1}{\rho}\nabla p$的数量级为$\frac{\eta a u_0}{\rho r^3}$. 因此$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$可忽略的条件是$\frac{\eta a u_0}{\rho r^3} \gg \frac{u_0^2 a}{r^2}$,即

$$r \ll \frac{\nu}{u}\ . \tag{7.24}$$

在这一条件不满足的区域,必须计入$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$项. 但在远处$\boldsymbol{v}\approx\boldsymbol{u}_0$,因可令$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\approx(\boldsymbol{u}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$,流体的运动方程变为

$$(\boldsymbol{u}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\boldsymbol{v}\ . \tag{7.25}$$

这个方程称为**奥新**(Osen)**方程**. 解此方程可得小球所受的阻力为

$$F = 6\pi\eta u_0 a\left(1+\frac{3au_0}{8\nu}\right)\ . \tag{7.26}$$

习　　题

10.1　已知速度场为

$$v_x = x^2 - y^2,\ v_y = -2xy,$$

求通过 $x=1, y=1$ 点的一条流线方程.

10.2　已知速度场为

$$v_x = -\frac{ky}{x^2+y^2},\ v_y = \frac{kx}{x^2+y^2},\ v_z = 0\ .$$

问此流体是无旋的还是有旋的,是否可压缩?

10.3　设不可压缩流体的质点遵循牛顿引力定律被固定中心吸引. 若流体的体积为 τ,

单位距离时的引力为 μ. 试求 $p=1$ 的等压面方程.

10.4 假定地球是由密度为 ρ_1 半径为 R 的不可压缩流体所构成,且任一单位质量上所受到的重力与该质量到地心的距离成正比. 在地球表面上单位质量所受到的力为 g,求地球中心的压力.

10.5 设大气层满足理想气体状态方程,在离地面 0~11 km 的对流层内,温度随高度的变化规律为 $T=T_0-\beta z$. 国际标准大气规定 $T_0=288\ \text{K}$, $p_0=10\ 330\ \text{Pa}$, $\rho_0=0.125\ \text{kg}\cdot\text{s}^2/\text{m}^4$, $\beta=0.006\ 5\ \text{k/m}$. 证明:

$$p=p_0\left(1-\frac{\beta}{T_0}z\right)^{\frac{g}{\beta R}}=p_0\left(1-\frac{z}{44\ 300\ \text{m}}\right)^{5.256},$$

$$\rho=\rho_0\left(1-\frac{\beta}{T_0}z\right)^{\frac{g}{\beta R}-1}=\rho_0\left(1-\frac{z}{44\ 300\ \text{m}}\right)^{4.256}.$$

离地面 11 km 以上是等温层,大气状态方程满足 $\frac{p}{\rho}=$ 常数. 证明

$$\frac{p}{p_{11}}=\frac{\rho}{\rho_{11}}=e^{-\frac{z/\text{m}-11\ 000}{6\ 340}},$$

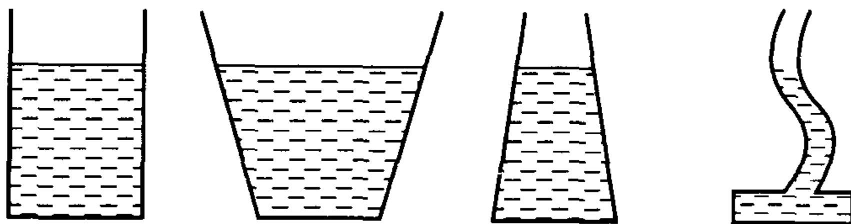
式中 p_{11} 和 ρ_{11} 分别为 11 km 处的压力和密度.

10.6 假定空气层与外界无热量交换,即设空气层是绝热的. 在重力场作用下求空气处于静止状态时的压力公式和温度公式. 假定地面上的 ρ_0、p_0、T_0 均已知.

10.7 开口水槽旁有一小孔,离水面的距离为 h,水面离槽底的高度为 h. 如将此水槽置于地上,问由小孔射出的水流,其射程为多少? 并求使射程有极大值时的 h 之值.

10.8 一圆锥形水槽的轴线沿铅直放置,高为 h,顶点向下,充满液体. 在顶点处开有一圆形小孔. 小孔半径为圆锥底部半径的 $1/n(n\gg1)$. 试证液体自小孔流出至原有高度的 1/2 时,所需时间不能少于 $\dfrac{(4\sqrt{2}-1)n^2\sqrt{h}}{20\sqrt{g}}$.

10.9 如下图所示的四个容器,其底面积都是相同的,容器中的液面也一样高. 这四个容器底面积受到的总压力是否一样? 为什么?

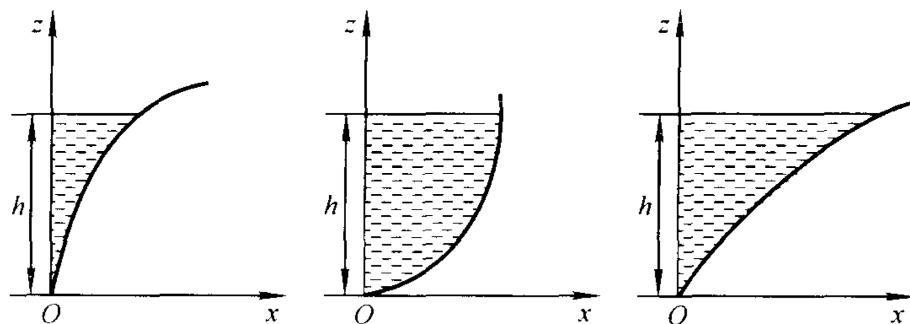


题 10.9 图

10.10 设水深为 h,试对下述几种剖面形状的柱形水坝,计算水对单位长度水坝的作用力及合力的作用点. (1) 半径为 R 的圆弧: $x^2+z^2=2Rx$; (2) 抛物线: $z=ax^2$; (3) 正弦曲线: $z=a\sin bx$.

10.11 半径为 a 的圆球在理想不可压缩静止流体中以匀速 u_0 平动. 求流体中的速度分布.

10.12 淹没在不可压缩静止流体中的球面,其半径以 $R=R(t)$ 的规律变化. 设无穷远



题 10.10 图

处流体的压力 p_{∞} 为常数，求流体中的压力分布.

10.13 在等截面的 U 形管中盛有液体，管的两端与大气相通，自由面的压力为 p_0，管中液体总长为 l. 设 $t=0$ 时液体处于静止状态，液体两端面高度差为 h. 求以后液面的振荡规律.

10.14 求粘滞流体在内半径和外半径分别为 R_1 和 R_2 的环形截面导管中流动时的速度分布，并求流量公式.

10.15 半径为 R_1 的柱面在另一半径为 R_2 的共轴柱面内以速度 u 平行于中心轴运动，两轴面间充满粘滞流体，求流体的速度分布，并求单位长柱面上所受到摩擦力.

* **10.16** 厚度为 h 的粘滞流体以自由面为上界，以静止平面为下界，平面的水平倾角为 α. 讨论在重力的影响下流体的运动.

* **10.17** 半径为 R_1 和 R_2 的两共轴圆柱体，柱面间充满粘滞流体. 设两柱体各以角速度 ω_1 和 ω_2 绕轴旋转，求流体的速度分布及施于柱面上的摩擦力矩.

* **10.18** 粘滞流体平行于 Oxy 平面作稳定流动，流速沿 x 轴，且只与坐标 y 有关，即 $v_x = v_x(y)$. 求单位体积流体在单位时间内的能量消耗.

10.19 半径为 a 的小球在粘度为 η 的液体中作振动，振幅为 A，阻力满足斯托克斯定律，求在一个周期中所消耗的平均功率.

10.20 已知空气的粘度为 1.7×10^{-5} Pa·s，问直径为 0.01 mm 的水滴在 2 cm/s 的上升气流中是否会向地面下落?

部分习题答案和提示

第 一 章

1.1 柱坐标中的运动微分方程：

$$\begin{cases} m(\ddot{R}-R\dot{\varphi}^2)=-F_{\mathrm{N}}\sin\theta, \\ m(R\ddot{\varphi}+2\dot{R}\dot{\varphi})=0, \\ m\ddot{z}=-F_{\mathrm{N}}\cos\theta-mg, \end{cases}$$

再加约束方程 $R^2+z^2=r^2$.

球坐标中的运动微分方程：

$$\begin{cases} mr(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)=F_{\mathrm{N}}+mg\cos\theta, \\ mr(\ddot{\theta}-\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta)=mg\sin\theta, \\ mr(\ddot{\varphi}\sin\theta+2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta)=0. \end{cases}$$

1.2 $2a\ddot{\theta}\sin\dfrac{\theta}{2}+a\dot{\theta}^2\cos\dfrac{\theta}{2}-g\cos\dfrac{\theta}{2}=0$.

1.4 运动规律 $r=b\,\mathrm{ch}\,\omega t$，作用力 $F_{\mathrm{N}}=2mb\omega^2\,\mathrm{sh}\,\omega t$.

1.5 $\Delta g=-\dfrac{\Delta R}{R}g$.

1.6 $(l-vt)\ddot{\theta}-2v\dot{\theta}=-g\sin\theta$，$l$ 为绳长.

1.8 提示：对数螺线 $r=r_0e^{\alpha\theta}$ 的曲率半径 $\rho=\sqrt{1+\alpha^2}\,r$，然后利用加速度的本性方程证明之.

1.9 绳子伸长时的运动方程为 $\dfrac{1}{2}m\dot{x}^2+\dfrac{1}{2}k(x-l_1)^2-mgx=0$，全程所需时间

$$t=\sqrt{\frac{2l_1}{g}}+\sqrt{\frac{l_2}{g}}\left(\pi-\arctan\sqrt{\frac{2l_1}{l_2}}\right),\quad AD=l_1+l_2+\sqrt{l_2^2+2l_1l_2}.$$

1.10 速率 $v=\sin\alpha\sqrt{\dfrac{gl}{\cos\alpha}}$，张力 $F_{\mathrm{T}}=\dfrac{mg}{\cos\alpha}$，周期 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l\cos\alpha}{g}}$.

1.11 (1) 能量守恒；(2) 最高点位置在 O' 点上方 $\dfrac{23}{54}l$ 处.

1.12 $v=ue^{\frac{\alpha}{2}\pi}$.

1.13 (1) 动量不守恒，角动量和能量守恒；

$$(2)\begin{cases} m_A(\ddot{R}-R\dot{\varphi}^2)=-F_T, \\ m_A(R\ddot{\varphi}+2\dot{R}\dot{\varphi})=0, \\ m_B\ddot{R}=F_T-m_Bg. \end{cases}$$

1.14 $\begin{cases} (m_A+m_B)\ddot{R}-m_AR\dot{\varphi}^2+m_Ag\sin\varphi\sin\theta+m_Bg=0, \\ 2m_AR\dot{R}\dot{\varphi}+m_AR^2\ddot{\varphi}+m_AgR\cos\varphi\sin\theta=0; \end{cases}$

体系的能量仍守恒,但角动量不再守恒.

1.15 $v=\left[\dfrac{m'^2}{(m'+m)^2}v_r^2\cos^2\alpha+v_r^2\sin^2\alpha\right]^{\frac{1}{2}}$, $u=-\dfrac{m}{m'+m}v_r\cos\alpha$.

1.17 体系的质心 C 作等速直线运动,速度 $v_C=\dfrac{m_B}{m_A+m_B}v_0$,$A$ 和 B 各绕质心作半径为 $r_1=\dfrac{m_Bl}{m_A+m_B}$ 及 $r_2=\dfrac{m_Al}{m_A+m_B}$ 的圆周运动,角速度均为 $\dot{\theta}=\dfrac{v_0}{l}$. 以质心 C 点的坐标 x_C 和 y_C 及杆和 x 轴的夹角 θ 为坐标,体系的动量 p、角动量 L、动能 T 的表示式为:

$$\boldsymbol{p}=(m_A+m_B)\dot{y}_C\boldsymbol{j}=m_Bv_0\boldsymbol{j},$$

$$\boldsymbol{L}=(m_A+m_B)x_C\dot{y}_C\boldsymbol{k}+\frac{m_Am_B}{m_A+m_B}l^2\dot{\theta}\boldsymbol{k}=lm_Bv_0\boldsymbol{k},$$

$$T=\frac{1}{2}(m_A+m_B)\dot{y}_C^2+\frac{1}{2}\frac{m_Am_B}{m_A+m_B}l^2\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}m_Bv_0^2.$$

1.18 $m_2^2=m_1m_3$.

1.19 $v=\sqrt{\dfrac{rg}{\pi}(\theta^2-2\cos\theta+2)}$.

1.20 $v_0^2\geqslant\dfrac{2g[(R_1-R_2)\cot\alpha-h]R_1^2}{R_1^2-(h\tan\alpha+R_2)^2}$时,质点将飞出漏斗之外;
$v_0^2\leqslant\dfrac{2ghR_2^2}{(h\tan\alpha+R_2)^2-R_2^2}$时,质点将落入漏斗之下;$v_0^2=g(h+R_2\cot\alpha)$时,质点将作圆周运动.

1.21 $v_0=\sqrt{\dfrac{2g}{h}}r$.

1.22 $\dot{\theta}=\sqrt{\dfrac{2g(\cos\alpha-\cos\theta)}{R\left(1-\dfrac{m}{m'+m}\cos^2\theta\right)}}$.

1.23 $v=\sqrt{\dfrac{g(L^2-l^2)}{a}}$, $t=\sqrt{\dfrac{L}{g}}\ln\dfrac{L+\sqrt{L^2-l^2}}{l}$.

1.24 $\ddot{\theta}+\omega^2\sin\theta\cos\theta=0$,$\theta$ 为质点的位矢 $\boldsymbol{r}$ 和$\overrightarrow{OO'}$的夹角.

1.25 $a_{杆}=-\dfrac{mg}{m+m'\cot^2\alpha}$,$a_{劈}=\dfrac{mg\cot\alpha}{m+m'\cot^2\alpha}$.

1.26 $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m'+\dfrac{m}{3}}}$.

1.27 体系的能量守恒. 对 O 点和对质心 C 的角动量也都守恒;质心 C 以 O 点为焦点作圆锥曲线运动,m_A 和 m_B 又分别以质心 C 为焦点作相同的圆锥曲线运动.

1.28 (1) 能量守恒,角动量不守恒; (2) 张力 $F_T=\dfrac{mv_0^2}{\sqrt{2Rv_0t}}$.

1.29 $s=\dfrac{m}{m+m'}(l_1-l_2)$, $t=\sqrt{\dfrac{2(l_1-l_2)(m'+m\sin^2\alpha)}{(m+m')g\sin\alpha\cos\alpha}}$.

1.30 $3\mu=(1-2\mu^2)e^{\mu\pi}$.

1.31 $v=v_0-gt+v_r\ln\dfrac{m_0}{m}$, $s=v_0t-\dfrac{1}{2}gt^2-v_r\int_0^t\ln f\mathrm{d}t$.

1.32 $v=\dfrac{g}{4\lambda}\left[r+\lambda t-\dfrac{r^4}{(r+\lambda t)^3}\right]$,式中 r 为雨滴形成时的半径,λ 为质量增加率的比例常数.

1.33 $v^2=\dfrac{2g}{3\rho}\dfrac{(m+\rho x)^3-m^3}{(m+\rho x)^2}\sin\alpha$.

1.34 $h=\dfrac{\sqrt{3}m}{\rho}$.

1.35 (2) $v_{\max}=v_r\ln\dfrac{m_0}{m}-\dfrac{g}{k}\left(1-\dfrac{m}{m_0}\right)$,

$$h_{\max}=\frac{v_r^2}{2g}\left(\ln\frac{m_0}{m}\right)^2+\frac{v_r}{k}\left(1-\frac{m}{m_0}-\ln\frac{m_0}{m}\right).$$

1.36 (1) $\dfrac{t'}{t}=\sqrt{\dfrac{m'}{m}}$; (2) $\dfrac{t'}{t}=\sqrt{\dfrac{1}{\alpha}}$.

1.37 $I>(m_A+m_B)\sqrt{\dfrac{m_A}{k}}g$.

1.38 $h'=h\left(1-\dfrac{m'}{2(m+m')}\right)$.

第 二 章

2.1 $\begin{cases}\csc^2\alpha\,\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2+g\cot\alpha=0,\\ r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi}=0.\end{cases}$

2.2 $\begin{cases}-\dfrac{z}{R}\ddot{R}+z\dot{\varphi}^2+\ddot{z}+g=0,\\ R\ddot{\varphi}+2\dot{R}\dot{\varphi}=0,\end{cases}$

R 和 z 满足约束方程 $R^2+z^2=r^2$.

2.4 $L=ma^2\dot{\theta}^2(1-\cos\theta)+mga(1-\cos\theta)$.

2.5 $L=\dfrac{1}{2}m[v^2+(l-vt)^2\dot{\theta}^2]+mg(l-vt)\cos\theta$.

2.6 $L=\dfrac{1}{2}m[\dot{z}^2(1+\tan^2\alpha)+(z\tan\alpha+R_2)^2\dot{\varphi}^2]-mgz$.

2.7 $L=\dfrac{m}{2}\left(\dot{R}^2+R^2\dot{\varphi}^2+\dfrac{R^2}{r^2-R^2}\dot{R}^2\right)-mg\sqrt{r^2-R^2}$.

2.8 $L=2mR^2[\dot{\theta}^2+2\omega\dot{\theta}\cos^2\theta+\omega^2\cos^2\theta]$.

2.9 以质心 C 的平面极坐标为广义坐标,

$$L=2m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+\frac{q^2}{2r}.$$

2.10 $L=\frac{1}{2}mR^2\varphi^2\dot{\varphi}^2$,$\varphi$ 为绳子展开的角度.

2.12 (1) $\frac{1}{2}m\left[\left(1+\frac{4R^2}{a^2}\right)\dot{R}^2+R^2\dot{\varphi}^2\right]+\frac{mg}{a}R^2=E$, $mR^2\dot{\varphi}=L$; (2) 初条件满足 $v_0^2=2gh$,h 为初位置的高度.

2.14 $F_T=P\tan\alpha\left(\frac{d}{2l}\csc^3\theta-1\right)$.

2.15 $\varphi=\arcsin\sqrt[3]{\frac{2d}{l}}$.

2.17 $\theta=0$,φ 满足方程 $l\tan^3\varphi-r\tan^2\varphi-r=0$.

2.18 取棒对球心 O 所张的角度为 2φ,则 φ 所满足的方程为 $mgR\sin\varphi-Rk(l-2R\sin\varphi)\cos\varphi=0$,$k$ 为劲度系数.

2.19 $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{P}{2kl}$.

2.20 (1) p_x 守恒(以半平面界线为 x 轴); (2) L_z 守恒(以两点源连线为 z 轴); (3) L_z 守恒(以圆柱对称轴为 z 轴); (4) $L_z+\frac{h}{2\pi}p_z$ 守恒(以圆柱轴线为 z 轴, h 为螺距).

2.21 $L=\frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2+\omega^2\sin^2\theta)-mgR\cos\theta$,质点的广义能量守恒,即

$$H=\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}mR^2\omega^2\sin^2\theta-mgR\cos\theta=\text{常数}.$$

2.22 $U=\frac{1}{r}+\frac{\dot{r}^2}{c^2r}$, $L=\frac{1}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-\frac{1}{r}\left(1+\frac{\dot{r}^2}{c^2}\right)$.

2.23

$$\begin{cases} m\ddot{R}-mR\dot{\varphi}^2-\dfrac{E_0q}{R}-B_0qR\dot{\varphi}=0,\\ mR^2\dot{\varphi}+\dfrac{qB_0}{2}R^2=\text{常数},\\ m\dot{z}=\text{常数}. \end{cases}$$

2.24 $L=\frac{1}{2}m[\dot{R}^2+(R^2+b^2)\dot{\varphi}^2]+\frac{mk^2}{2}R^2$,斥力 $F=mk^2R$;

$$\begin{cases} m(R^2+b^2)\dot{\varphi}=\text{常数},\\ m\ddot{R}-mR\dot{\varphi}^2-mk^2R=0. \end{cases}$$

2.25 $\omega'=\frac{m_2}{m_1+m_2}\omega$, $I=-\frac{m_1^2m_2}{(m_1+m_2)^2}l^2\omega$.

2.26 $(R^2+r^2-2Rr\cos\theta)\ddot{\theta}+Rr\sin\theta\dot{\theta}^2-gR\sin\alpha+gr\sin(\theta+\alpha)=0$.

2.27 $v'_{Ax}=-\frac{2m'\sin\theta\cos\theta}{m'+m\sin^2\theta}u$, $v'_{Ay}=\left(\frac{2m'\cos^2\theta}{m'+m\sin^2\theta}-1\right)u_0$, $v'_{Bx}=\frac{2m\sin\theta\cos\theta}{m'+m\sin^2\theta}u$,

$v'_{By}=0$.

2.29 $e=\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{1-\cos\alpha}}-1$.

2.30 $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}\ \frac{1+e}{1-e},\ s=h\ \frac{1+e^2}{1-e^2}$.

第 三 章

3.1 $E>0, L^2>2m\alpha$ 时,

$$\frac{1}{r}=\sqrt{\frac{2mE}{L^2-2m\alpha}}\cos\left(\sqrt{1-\frac{2m\alpha}{L^2}}\theta\right),$$

$E>0, L^2<2m\alpha$ 时,

$$\frac{1}{r}=\sqrt{\frac{2mE}{2m\alpha-L^2}}\mathrm{sh}\left(\sqrt{\frac{2m\alpha}{L^2}-1}\theta\right),$$

$E<0, L^2<2m\alpha$ 时,

$$\frac{1}{r}=\sqrt{\frac{2m|E|}{2m\alpha-L^2}}\mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{2m\alpha}{L^2}-1}\theta\right)$$

后两种情况,原来在 r 处的粒子经过时间

$$t=\frac{1}{E}\sqrt{\frac{m}{2}}\left[\sqrt{Er^2+\alpha-\frac{L^2}{2m}}-\sqrt{\alpha-\frac{L^2}{2m}}\right]$$

以后,将被力心俘获.

3.2 体系的质心作抛射体运动,相对运动部分的运动方程为

$$t=\int_{r_0}^{r}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2}{m_r}\left[E-\frac{1}{2}k(r-l)^2\right]-\frac{L^2}{m_r^2r^2}}},$$

轨道方程为

$$\theta=\int_{r_0}^{r}\frac{\frac{L}{r^2}\mathrm{d}r}{\sqrt{2m_r\left[E-\frac{1}{2}k(r-l)^2\right]-\frac{L^2}{r^2}}}.$$

3.4 当 $\alpha r\gg1$ 时,近似于自由粒子的运动;当 $\alpha r\ll1$ 时,近似为在势场 $-\frac{k}{r}$ 中的开普勒问题;当 $r\alpha\approx1$ 时,仍近似地为开普勒问题,但势场减弱为 $-\frac{k}{r}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}}$.

3.5 $\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+\frac{L_z^2}{2ml^2\sin^2\theta}-mgl\cos\theta=E$,

$$t=\int\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\frac{2}{ml^2}[E-V_{\mathrm{eff}}(\theta)]}},$$

$$\varphi=\frac{L_z}{l\sqrt{2m}}\int\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin^2\theta\sqrt{E-V_{\mathrm{eff}}(\theta)}},$$

其中 $V_{\text{eff}}(\theta)=\dfrac{L_z^2}{2ml^2\sin^2\theta}-mgl\cos\theta$，这两式都是椭圆积分.

3.6 $r=\dfrac{a}{1+e\cos\alpha\theta}$，式中 $a=\dfrac{mh^2\alpha^2}{k}$，$\alpha^2=1+\dfrac{c}{mh^2}$，$e=\dfrac{Amh^2\alpha^2}{k}$（$A$ 为积分常数）.

3.7 $r=\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{L^2}{m^2}+c\right)$，轨道是稳定的.

3.8 $x=\dfrac{p}{2}(1-\eta^2)$，$y=p\eta$，式中 $p=\dfrac{L^2}{m\alpha}$，η 由方程

$$t=\sqrt{\frac{mp^3}{\alpha}}\ \frac{\eta}{2}\left(1+\frac{\eta^2}{3}\right)$$

决定.

3.9 （1）$\delta\theta=-\dfrac{2\pi\beta}{\alpha p}$；（2）$\delta\theta=-\dfrac{2\pi\gamma}{\alpha p^2}$，式中 $p=\dfrac{L^2}{m\alpha}$.

3.10 当 $n>2$，$\alpha<0$，且初始条件满足 $r_0^{n+2}=\dfrac{L^2}{m\alpha n}$ 时，粒子作稳定的圆形轨道.

3.12 偏心率、周期和近地点均因大气阻尼而减小.

3.13 $\dfrac{v'_{01}}{v}=\dfrac{m_1}{m_1+m_2}\cos\Theta_1\pm\dfrac{1}{m_1+m_2}\sqrt{m_2^2-m_1^2\sin^2\Theta_1}$，$\dfrac{v'_{02}}{v}=\dfrac{2m_1}{m_1+m_2}\cos\Theta_2$.

3.14 提示：先证明库仑散射 $\mathrm{d}\sigma=2\pi\dfrac{\alpha^2}{m_2v_\infty^2}\dfrac{\mathrm{d}\varepsilon}{\varepsilon^2}$.

3.15 $E=\left(\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\dfrac{2q_1^2q_2^2}{mv_0^2s^2}$.

3.16 $b\leqslant\sqrt{\dfrac{2\alpha}{m_r v_\infty^2}}$，$\sigma=\pi\left(\dfrac{2\alpha}{m_r v_\infty^2}\right)$.

3.17 $\mathrm{d}\sigma=\dfrac{2\alpha\pi^2}{m_r v_\infty^2}\cdot\dfrac{\pi-\theta}{(\theta^2-2\pi\theta)^2}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\sin\theta}$.

3.18 $$\mathrm{d}\sigma=\frac{a^2n^2}{4\cos\dfrac{\theta}{2}}\cdot\frac{\left(n\cos\dfrac{\theta}{2}-1\right)\left(n-\cos\dfrac{\theta}{2}\right)}{\left(n^2+1-2n\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^2}\mathrm{d}\omega,$$

式中 $n=\sqrt{1-\dfrac{2V_0}{mv_\infty}}$ 而总散射截面则为 $\sigma=\pi a^2$.

3.19 令 Θ 表示两个新生粒子飞出方向的夹角，并假定 $v_2>v_1$，则 Θ 的变化范围为：

$$v_1<v_{0C}<v_2\ 时，0<\Theta<\pi,$$
$$v_{0C}>v_2\ 时，\pi-\theta_0<\Theta<\pi,$$
$$v_{0C}<v_1\ 时，0<\Theta<\theta_0,$$

式中 $\sin\theta_0=\dfrac{v_{0C}(v_1+v_2)}{v_{0C}^2+v_1v_2}$.

3.20 $\boldsymbol{B}$ 是沿极轴方向的常矢量.

第 四 章

4.1 （1）$\omega_{\mathrm{P}}=0$，$\omega_{\mathrm{S}}=\left(\dfrac{r_1}{r_2}+1\right)\dot{\theta}$；（2）$\omega_{\mathrm{P}}=\dot{\psi}$，$\omega_{\mathrm{S}}=\left(\dfrac{r_1}{r_2}+1\right)\dot{\theta}+\dfrac{r_1}{r_2}\dot{\psi}$；（3）$\omega_{\mathrm{S}}=\omega_{\mathrm{P}}=0$，

或各等于常数. 式中 ψ 为圆柱 P 转过的角度,θ 为两圆柱连心线和铅直方向的夹角.

4.2 (1) $\omega_P=\dot{\psi}$, $\omega_S=\left(\frac{r_1}{r_2}-1\right)\dot{\theta}+\frac{r_1}{r_2}\dot{\psi}$; (2) $\omega_P=\dot{\psi}$, $\omega_S=0$ 或常数.

4.3 $\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{h}{R}$.

4.4 $v_A=2v_0\sin^2\frac{\varphi}{2}\left[1+\frac{R\sin\varphi}{\sqrt{l^2-4R^2\sin^4\frac{\varphi}{2}}}\right]$.

4.5 空间极迹为 $x^2+y^2=R^2$,本体极迹为 $x'^2+y'^2=4R^2$,杆上任一点 P 的轨迹为 $\rho=MP=2R\cos\theta-a$,式中 θ 为杆 MA 和 MO 的夹角 a 为 P 点到 A 点的距离.

4.6 $\omega=\frac{v_0}{R}\sin\theta\tan\theta$, $v_D=v_0\cos\theta$,式中 θ 为杆 BA 和水平线的夹角.

4.7 $v_A=2\omega h\cos\alpha$, A 点的转动加速度 $a_1=\frac{\omega^2 h}{\sin\alpha}$,向心加速度 $a_2=2h\omega^2\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$.

4.8 $v_B=\omega_1 a+\omega_2 b\sin\theta+\omega_2 a\cos\theta$.

4.9 $\frac{d\omega}{dt}=ab\sin c(\cos bt\boldsymbol{i}-\sin bt\boldsymbol{j})$.

4.13 $t=\frac{3r\omega_0}{4\mu g}$.

4.14 $l'=\frac{\sqrt{3}}{2}l$.

4.15 $\theta=\arcsin\left(\frac{2}{3}\sin\alpha\right)$.

4.16 $F_C=\frac{3mg}{4(1+3\sin^2\theta)^2}\left(12\sin^4\theta+11\sin^2\theta+\frac{1}{3}\right)$.

4.17 $v_C=\sqrt{3gh}$.

4.18 $\ddot{x}_C=\frac{2F(R\cos\alpha-r)R}{m(3R^2+r^2)}$.

4.19 $l'=a$.

4.20 $t=\frac{v}{\left(\frac{7}{2}+\frac{m}{m'}\right)\mu g}$.

4.21 (1) $\frac{3}{2}(r_1+r_2)\ddot{\theta}-g\sin\theta=0$;

(2) $\begin{cases}\frac{3}{2}(m+m')\dot{x}+m(r_1+r_2)\left(\cos\theta-\frac{1}{2}\right)\dot{\theta}=\text{常数},\\ \left(\cos\theta-\frac{1}{2}\right)\ddot{x}+\frac{3}{2}(r_1+r_2)\ddot{\theta}-g\sin\theta=0;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}(m+m')\dot{x}+m(r_1+r_2)\cos\theta\dot{\theta}=\text{常数},\\ (r_1+r_2)\ddot{\theta}+\cos\theta\,\ddot{x}-\sin\theta\dot{x}\dot{\theta}-g\sin\theta=0.\end{cases}$

4.22 $I=\frac{3mr^2(r^2+6h^2)}{20(r^2+h^2)}$,式中 r 为圆锥底的半径,h 为圆锥的高.

4.23 $(3r^2+2h^2)x^2+(23r^2+2h^2)y^2+26r^2z^2+10rhxz=k^2$.

4.24 $13x^2+13y^2+8z^2-6xy-9yz-9zx=k^2$.

4.25 $h=2r$.

4.27 $T=\frac{m}{10}[(b^2+c^2)\dot{\theta}^2\sin^2\varphi+(c^2+a^2)\dot{\theta}^2\cos^2\varphi+(a^2+b^2)\dot{\varphi}^2]$,

$$\boldsymbol{L}=-\frac{m}{5}[(b^2+c^2)\dot{\theta}\sin\varphi\boldsymbol{i}+(c^2+a^2)\dot{\theta}\cos\varphi\boldsymbol{j}+(a^2+b^2)\dot{\varphi}\boldsymbol{k}].$$

4.28 $\boldsymbol{L}=\frac{m\omega}{20}(8b^2+5l^2)\boldsymbol{j}+\frac{2}{5}\sqrt{3}m\omega b^2\boldsymbol{k}$,

$$T=\frac{m}{2}\left(\frac{4}{5}b^2+\frac{1}{8}l^2\right)\omega^2.$$

4.30 $F=\frac{Rl+hr}{Rr(l^2+r^2)^2}\left[\frac{1}{2}mr^2(Rl+hr)l-\frac{1}{4}(mr^2+ml^2)(hl-Rr)r\right]\omega^2$,

式中 ω 为圆盘绕铅直轴转动的角速度，h 为 E 点离水平面的高度，R 为 N 点作圆周运动的半径.

4.31 $\omega'=\omega_0\sqrt{1+3\cos^2\alpha}$，$\tan\theta=\frac{1}{2}\tan\alpha$.

4.34 令斜面为 Oxy 平面，m 为球的质量，φ、θ、ψ 为球转动的欧拉角，λ_1 和 λ_2 为球在平面上滚动时的摩擦力 F_x 和 F_y，则球的运动方程为

$$\begin{cases} m\ddot{x}+mg\sin\alpha=\lambda_1, \\ m\ddot{y}=\lambda_2, \\ \frac{2}{5}mr^2(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)=\text{常数}, \\ \frac{2}{5}mr^2(\ddot{\theta}+\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta)=-\lambda_1 r\sin\varphi+\lambda_2 r\cos\varphi, \\ \frac{2}{5}mr^2(\ddot{\psi}+\ddot{\varphi}\cos\theta-\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta)=\lambda_1 r\sin\theta\cos\varphi+\lambda_2 r\sin\theta\sin\varphi, \end{cases}$$

外加两个约束方程

$$\begin{cases} \mathrm{d}x+r\sin\theta\cos\varphi\mathrm{d}\psi-r\sin\varphi\mathrm{d}\theta=0, \\ \mathrm{d}y+r\sin\theta\sin\varphi\mathrm{d}\psi+r\cos\varphi\mathrm{d}\theta=0. \end{cases}$$

由以上 7 个方程可对 x、y、φ、θ、ψ、λ_1、λ_2 等 7 个未知函数求解. 它有 2 个运动积分：一是能量守恒，二是上述第 3 个运动方程，它表示 L_z 守恒.

4.35 体系的质心作等速直线运动；圆环只作平动，没有转动；质点沿环以角速度 $\dot{\theta}=\frac{v_0}{r}$ 运动.

4.36 $I_3\omega_z\geqslant 4I_1 mgl\cos\theta_0$.

4.37 $\omega_2=2\omega_1$.

4.39 $\omega^2>\frac{4mglI_1}{I_3^2}$.

4.40 (1) 以 A 点为坐标原点，AC 为 z 轴，x 轴在正方形 $ABCD$ 平面内，这样所选取的

三个坐标轴即为惯量主轴,其主转动惯量分别为:$I_1=\frac{8}{3}ml^2,I_2=\frac{10}{3}ml^2,I_3=\frac{2}{3}ml^2$; (2) $L=\frac{1}{3}\omega\times ml^2(-4\boldsymbol{i}+\sqrt{3}\boldsymbol{k}),T=\frac{7}{12}ml^2\omega^2$; (3) 将 $E=\frac{7}{12}ml^2\omega^2+\frac{\sqrt{6}}{4}mgl,L_k=\frac{\sqrt{3}}{3}ml^2\omega$ 代入拉格朗日方程,即得体系的运动方程.

4.41 $v_C=\frac{24I}{7m}$, $T=\frac{12}{7m}I^2$.

第 五 章

5.1 直角坐标:

$$v=l(\omega_2\cos\theta\cos\varphi-\omega_1\sin\theta\sin\varphi)\boldsymbol{i}+l(\omega_2\cos\theta\sin\varphi+\omega_1\sin\theta\cos\varphi)\boldsymbol{j}+l\omega_2\sin\theta\boldsymbol{k};$$

柱坐标:取铅直方向为 $\boldsymbol{k}$ 方向,$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 在杆平面内,则

$$\boldsymbol{v}=l\omega_2(\cos\theta\boldsymbol{i}+\sin\theta\boldsymbol{k})+l\omega_1\sin\theta\boldsymbol{j};$$

球坐标:取杆方向为 $\boldsymbol{i}$ 方向,$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 在杆平面内,则

$$v=l\omega_2\boldsymbol{j}-l\omega_1\sin\theta\boldsymbol{k}.$$

5.2 直角坐标:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}=&l[\dot{\omega}_2\cos\theta\cos\varphi-\dot{\omega}_1\sin\theta\sin\varphi-2\omega_1\omega_2\cos\theta\sin\varphi-(\omega_1^2+\omega_2^2)\sin\theta\cos\varphi]\boldsymbol{i}+\\&l[\dot{\omega}_1\sin\theta\cos\varphi+\dot{\omega}_2\cos\theta\sin\varphi+2\omega_1\omega_2\cos\theta\cos\varphi-(\omega_1^2+\omega_2^2)\sin\theta\sin\varphi]\boldsymbol{j}+\\&l(\dot{\omega}_2\sin\theta+\omega_2^2\cos\theta)\boldsymbol{k};\end{aligned}$$

柱坐标:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}=&l(\dot{\omega}_2\cos\theta-\omega_2^2\sin\theta-\omega_1^2\sin\theta)\boldsymbol{i}+l(2\omega_1\omega_2\cos\theta\\&+\dot{\omega}_1\sin\theta)\boldsymbol{j}+l(\dot{\omega}_2\sin\theta+\omega_2^2\cos\theta)\boldsymbol{k};\end{aligned}$$

球坐标:

$$\boldsymbol{a}=l(-\omega_1^2\sin^2\theta-\omega_2^2)\boldsymbol{i}+l(-\omega_1^2\sin\theta\cos\theta+\dot{\omega}_2)\boldsymbol{j}+l(-\dot{\omega}_1\sin\theta-2\omega_1\omega_2\cos\theta)\boldsymbol{k}.$$

5.3 $v=2\omega R\sin\omega t,a=2\omega^2R\cos\omega t$,$M$ 点的轨迹为初始时刻从 M 点到 C 点的直线.

5.4 $v'=\left[v^2\left(1+\frac{l}{R}\sin\theta\right)^2+l^2\omega^2\right]^{\frac{1}{2}}$.

5.6 以 $t=0$ 时 OAB 方向为极轴,则质点在固定坐标系中的轨迹方程为 $r=\frac{8}{3}d\cos3\theta$;质点在运动平面上的轨迹为中心在 OB 的中点、半径为$\frac{4}{3}d$ 的圆.

5.8 船将获得 $v=2.6\times10^{-4}$ m/s 的速度.

5.9 $v'=[v_0^2+2r(g-a)(\cos\theta-\cos\theta_0)]^{\frac{1}{2}}$, $F=\frac{mg}{r}\left[r\left(1-\frac{a}{g}\right)(3\cos\theta-2\cos\theta_0)+\frac{v_0^2}{g}\right]$,式中 v_0 为 $t=0$ 时小环相对于圆圈的速度.

5.11 向西偏离$\frac{8}{3}\sqrt{\frac{2h^3}{g}}\omega_0\sin\lambda$.

5.12 向南偏离$\frac{4v_0^3}{g^2}\omega_0\sin\lambda\cos\alpha\sin^2\alpha$.

5.13 $\left(1+\frac{x^2}{4a^2}\right)\ddot{x}+\frac{x}{4a^2}\dot{x}^2-\left(\omega^2-\frac{g}{2a}\right)x=0.$

5.14 取运动平面为 Oxy 平面，质点的运动方程为

$$\begin{cases}\ddot{x}-2\omega\dot{y}\cos\alpha+(k^2-\omega^2)x=0,\\ \ddot{y}+2\omega\dot{x}\cos\alpha+(k^2-\omega^2\cos^2\alpha)y=0,\end{cases}$$

当 $\frac{k^2}{\omega^2}>1$ 时，质点作振动；$1>\frac{k^2}{\omega^2}>\cos^2\alpha$ 时，质点一面振动，一面远离力心 O 点；$\frac{k^2}{\omega^2}<\cos^2\alpha$ 时，质点单调地远离力心 O 点.

5.15 取 OA 与铅直轴向下的夹角为 θ，质点的运动方程为 $\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=\omega^2\sin\theta\cos\theta$；体系处于相对平衡时 θ 的值为 $\theta=0$ 或 $\theta=\pm\arccos\left(\frac{g}{l\omega^2}\right)$.

5.16 提示：在匀加速 $\boldsymbol{a}$ 的参考系中，陀螺除受重力 $m\boldsymbol{g}$ 外，还受到惯性力 $-m\boldsymbol{a}$，两者都作用在质心上，令其合力为 $m\boldsymbol{g}'$，其大小和方向均和 $m\boldsymbol{g}$ 不同. 但除此之外均和惯性系中的拉格朗日陀螺的情况一样，可用相应的方法进行讨论.

5.17 $d=l(2-\cos\omega t)$.

5.18
$$\begin{cases}\ddot{\theta}_1\left(\frac{1}{2}+\cos^2\theta_2\right)-2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos\theta_2\sin\theta_2+\frac{g}{R}\cos\theta_2\sin\theta_1=0,\\ 2\ddot{\theta}_2+\dot{\theta}_1^2\cos\theta_2\sin\theta_2+\frac{g}{R}\sin\theta_2\cos\theta_1=0\;,\end{cases}$$

式中 θ_1 和 θ_2 分别为运动平面和圆环偏离其平衡位置的角度.

第 六 章

6.1
$$\begin{cases}r=l+\frac{mg}{k}+A\cos(\omega_1t+\varepsilon_1),\\ \theta=B\cos(\omega_2t+\varepsilon_2),\end{cases}$$

式中 $\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}}$，$\omega_2=\sqrt{\frac{g}{l+\frac{mg}{k}}}$，$A$、$B$、$\varepsilon_1$、$\varepsilon_2$ 是积分常数.

6.2 简正坐标为：$q_1=\theta+\frac{m}{m'+m}\varphi$，$q_2=\theta-\varphi$；简正频率为：$\omega_1=\sqrt{\frac{g}{2r}}$，$\omega_2=\sqrt{\frac{g(m+m')}{rm'}}$.

6.3 $\omega_1=\sqrt{(7+\sqrt{37})\frac{g}{l}}$，$\omega_2=\sqrt{(7-\sqrt{37})\frac{g}{l}}$；简正振动模式为：$\frac{\theta_1}{\theta_2}=-1.180$ 和 $\frac{\theta_1}{\theta_2}=0.847$.

6.4
$$\begin{cases}m_1\ddot{q}_1+(k_1+k_2)q_1-k_2q_2=0,\\ m_2\ddot{q}_2+(k_2+k_3)q_2-k_2q_1-k_3q_3=0,\\ m_3\ddot{q}_3+k_3q_3-k_3q_2=0.\end{cases}$$

6.5 $\omega_1=\sqrt{\frac{g}{l}}$, $\omega_2=\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2k}{m}}$.

6.6 $\omega^4-\left(\frac{k}{m_1}+\frac{m_1+m_2}{m_1}\ \frac{g}{l}\right)\omega^2+\frac{gk}{m_1 l}=0$.

6.7 $\omega_1=\sqrt{\frac{k}{2m}}$, $\omega_2=\sqrt{\frac{3k}{2m}}$.

6.8 设 x_1、和 x_2 分别为两个摆钟偏离铅直位置的位移，当 x_1 和 x_2 相对 d 来说都很小时，

$$x_1=\frac{q^2}{md^2\left(\frac{4\pi\varepsilon_0 g}{l}-\frac{4q^2}{md^3}\right)}+\frac{A_1}{2}\cos(\omega_1 t+\varepsilon_1)-\frac{A_2}{2}\cos(\omega_2 t+\varepsilon_2)$$

$$x_2=\frac{-q^2}{md^2\left(\frac{4\pi\varepsilon_0 g}{l}-\frac{4q^2}{md^3}\right)}+\frac{A_1}{2}\cos(\omega_1 t+\varepsilon_1)+\frac{A_2}{2}\cos(\omega_2 t+\varepsilon_2),$$

式中 $\omega_1=\sqrt{\frac{g}{l}}$，$\omega_2=\sqrt{\frac{g}{l}-\frac{4q^2}{4\pi\varepsilon_0 ma^3}}$，$A_1$、$A_2$、$\varepsilon_1$、$\varepsilon_2$ 为积分常数

6.9 $\omega_1=\frac{2l_1}{l_0}\sqrt{\frac{k}{m}}$，$\omega_2=\frac{2l_2}{l_0}\sqrt{\frac{k}{m}}$.

6.10 当 $k_1=k_2$，且平板质心 C 位于两个弹簧的中间时，振动频率为 $\omega_1=\sqrt{\frac{2k}{m}}$，$\omega_2=\frac{l}{\rho}\sqrt{\frac{2k}{m}}$，式中 l 为质心 C 到两个弹簧的距离，$m\rho^2$ 为平板绕质心 C 的转动惯量.

6.11 $\omega_1=3.78\ \mathrm{s}^{-1}$，$\omega_2=2.32\ \mathrm{s}^{-1}$.

6.12 $\omega_1=0$（两个盘同向转动），$\omega_2=\sqrt{\frac{k(I_1+I_2)}{I_1 I_2}}$（两个盘反向转动）.

6.13 纵振动的两个振动频率由方程

$$\omega^4-\left[k_1\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)+k_2\left(\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}\right)\right]\omega^2+\frac{k_1k_2(m_1+m_2+m_3)}{m_1m_2m_3}=0$$

决定，横振动的频率为

$$\omega^2=\frac{k'(l_1+l_2)^2}{4l_1^2l_2^2}\left[\frac{l_1^2}{m_3}+\frac{l_2^2}{m_1}+\frac{(l_1+l_2)^2}{m_2}\right],$$

式中 k_1、k_2 和 k' 为相应的劲度系数，l_1 和 l_2 为 m_1 和 m_2 及 m_2 和 m_3 之间的平衡距离.

6.14 $\omega_1=\omega_0\sqrt{1+\frac{\alpha}{\omega_0^2}}$, $\omega_2=\omega_0\sqrt{1-\frac{\alpha}{\omega_0^2}}$.

6.15 $\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}\left(1+\frac{nm}{m'}\right)}$；$\omega_i=\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$，$i=2,3,\cdots,n$；$\omega_{n+1}=0$，表示整体平动.

6.16 $\omega^2=\frac{1}{2(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)}\left[(a_{11}b_{22}+b_{11}a_{22})\pm\sqrt{(a_{11}b_{22}-b_{11}a_{22})^2+4a_{12}^2b_{11}b_{22}}\right]$,

振幅比：

$$\frac{A_1}{B_1}=\frac{b_{22}a_{12}}{b_{11}a_{22}-(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)\omega_1^2},$$

$$\frac{A_2}{B_2}=\frac{b_{22}a_{12}}{b_{11}a_{22}-(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)\omega_2^2}.$$

式中 $a_{11}=m_1a^2+m_2c^2+I_1$, $a_{12}=m_2bc$, $a_{22}=m_2b^2+I_2$, $b_{11}=(m_1a+m_2c)g$, $b_{22}=m_2bg$; $a=AC_1$, $b=BC_2$, $c=AB$.

I_1 和 I_2 及 m_1 和 m_2 分别为两个物体绕质心的转动惯量及其质量.

6.17 当钟身和钟舌满足条件

$$\begin{cases} m_1a^2+m_2c^2+I_1=m_2b^2+I_2, \\ m_1a+m_2c=m_2b \end{cases}$$

时,钟将不能打响而成为哑钟,式中各量的意义和上题同.

6.18

$$\begin{cases} q_1=\frac{1}{2}(q_{10}-q_{30})\cos 2t/\mathrm{s}+\frac{1}{3}(q_{10}+q_{20}+q_{30})\cos\sqrt{3}t/\mathrm{s}+\frac{1}{6}(q_{10}-2q_{20}+q_{30})\cos\sqrt{6}t/\mathrm{s}, \\ q_2=\frac{1}{3}(q_{10}+q_{20}+q_{30})\cos\sqrt{3}t/\mathrm{s}-\frac{1}{3}(q_{10}-2q_{20}+q_{30})\times\cos\sqrt{6}t/\mathrm{s}, \\ q_3=-\frac{1}{2}(q_{10}-q_{30})\cos 2t/\mathrm{s}+\frac{1}{3}(q_{10}+q_{20}+q_{30})\cos\sqrt{3}t/\mathrm{s}+\frac{1}{6}(q_{10}-2q_{20}+q_{30})\cos\sqrt{6}t/\mathrm{s}. \end{cases}$$

第 七 章

7.2 上升的最大高度 $h=214.5$ m,所需时间 $t_1=6.32$ s;落回地面时的速度 $v=56.7$ m/s,所需时间 $t_2=6.93$ s.

7.3 2.27 m.

7.4 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g-lk^2}}$.

7.5 $t=\frac{\pi m}{4F_0}v_\infty$, $x=\frac{mv_\infty^2}{2F_0}\ln 2$,式中 m 为船的质量,F_0 为船的驱动力.

7.7 $x=\frac{v_0\cos\alpha}{\beta}(1-\mathrm{e}^{-\beta t})$,

$$y=-\frac{g}{\beta}t+\left(\frac{v_0\sin\alpha}{\beta}+\frac{g}{\beta^2}\right)(1-\mathrm{e}^{-\beta t}),$$

式中 v_0 为初速度,α 为出射角.

7.8 $\omega_1=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$, $\omega_2=\sqrt{3\omega_0^2-\beta^2}$,

式中 $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$, $\beta=\frac{c}{2m}$.

7.9 相遇条件为 $v_0-kh>0$,相遇时的时间 $t=\frac{1}{k}\ln\frac{v_0}{v_0-hk}$,相遇时的高度为 $x=h-\frac{g}{k^2}\ln\frac{v_0}{v_0-kh}+\frac{gh}{kv_0}$.

7.10 $r=\frac{d}{2p}[(p+\mu)\mathrm{e}^{(p-\mu)\omega t}+(p-\mu)\mathrm{e}^{-(p+\mu)\omega t}]$,

式中 $p=\sqrt{1+\mu^2}$.

7.12 $v=\dfrac{2a(1-e^{-kt})}{(\sqrt{b^2+4ac}-b)+(\sqrt{b^2+4ac}+b)e^{-kt}}$,

式中 $k=\dfrac{1}{m}\sqrt{b^2+4ac}$.

第 八 章

8.1 柱坐标 $H=\dfrac{1}{2m}\left[p_R^2+\dfrac{p_\varphi^2}{R^2}+p_z^2\right]+V(R,\varphi,z)$,

球坐标 $H=\dfrac{1}{2m}\left[p_r^2+\dfrac{p_\theta^2}{r^2}+\dfrac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right]+V(r,\theta,\varphi)$.

8.2 $H=\dfrac{p_\varphi^2}{2(I_C+ml^2)}-mgl\cos\varphi$,式中 l 为质心到悬挂点的距离,I_C 为绕质心的转动惯量;正则方程为 $\dot{\varphi}=\dfrac{p_\varphi}{I_C+ml^2}$,$\dot{p}_\varphi=-mgl\sin\varphi$.

8.3 设阻力 $F=-k\dot{y}^2$,则正则方程为 $\dot{y}=\dfrac{p}{m}$,$\dot{p}=-mg\pm\dfrac{kp^2}{m^2}$.

8.4 $x=a\operatorname{ch}\dfrac{y-b}{a}$.

8.8 $H^*=P$; $\dot{Q}=1$; $\dot{P}=0$;由此正则方程的解:$Q=t+\alpha$ 和 $P=\beta$ 可得 $y=\dfrac{1}{mg}\left[\beta-\dfrac{1}{2}mg^2(t+\alpha)^2\right]$,式中 α 和 β 是积分常数.

8.10 $H^*=kQ$; $\dot{Q}=0$, $\dot{P}=-k$.

8.11 当 $\alpha=\dfrac{1}{2}$,$\beta=2$ 时为正则变换,母函数

$$F_3=-\frac{1}{2}Q^2\tan 2p.$$

8.12 $F_2=(x\cos\omega t+y\sin\omega t)P_X+(-x\sin\omega t+y\cos\omega t)P_Y+zP_Z$,

$$H^*=\frac{1}{2m}(P_X^2+P_Y^2+P_Z^2)+\omega(YP_X-XP_Y)+V(R),$$

式中 $R=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$.

8.15 $S=-Et+\eta_1x+\int\sqrt{m^2v_0^2-\eta_1^2-2m^2gy}\,dy$,

式中 $E=\dfrac{1}{2}mv_0^2$ 和 $\eta_1=mv_0\cos\alpha$ 为积分常数;轨道方程为

$$y=x\tan\alpha-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2.$$

8.16 $S=-Et+\dfrac{m\omega_1}{2}\left[x\sqrt{\dfrac{2\eta_1}{m\omega_1^2}-x^2}+\dfrac{2\eta_1}{m\omega_1^2}\arcsin\left(\sqrt{\dfrac{m\omega_1^2}{2\eta_1}}x\right)\right]+$

$$\frac{m\omega_2}{2}\left[\sqrt{\frac{2(E-\eta_1)}{m\omega_2^2}-y^2}+\frac{2(E-\eta_1)}{m\omega_2}\arcsin\left(\sqrt{\frac{m\omega_2^2}{2(E-\eta_1)}}y\right)\right].$$

方程的解为

$$x=\sqrt{\frac{2\eta_1}{m\omega_1^2}}\sin\omega_1(t-\varepsilon_1),\quad y=\sqrt{\frac{2(E-\eta_1)}{m\omega_2^2}}\sin\omega_2(t-\varepsilon_2),$$

式中 E、η_1、ε_1、ε_2 为积分常数.

8.17 $S=-Et+\eta_1\varphi+\eta_2\psi-\int\sqrt{2I_1E-\frac{I_1}{I_3}\eta_1^2-2I_1mgl\cos\theta-\left(\frac{\eta_2-\eta_1\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta$,

式中 E、η_1、η_2 为积分常数.

8.18 $S=-Et+\alpha\theta+\int\sqrt{2mE-mkr^2-\frac{\alpha^2}{r^2}}\,\mathrm{d}r$,其解为

$$r=\left[\frac{E}{k}+\frac{1}{k}\sqrt{E^2-\frac{k}{m}\alpha^2}\cos 2\sqrt{\frac{k}{m}}t\right]^{\frac{1}{2}},$$

式中 α、E 为积分常数.

第 十 章

10.1 $y^3-3x^2y+2=0$.

10.2 无旋,不可压缩.

10.3 $r=\dfrac{\mu\rho}{1+\mu\rho\left(\dfrac{4\pi}{3\tau}\right)^{\frac{1}{3}}}$.

10.4 $p=\dfrac{1}{2}\rho gR$.

10.6 $p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}=p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-\dfrac{\gamma}{\gamma-1}g\rho_0 p_0^{-\frac{1}{\gamma}}z$, $\quad T=T_0\left(1-\dfrac{\gamma}{\gamma-1}\dfrac{\rho_0}{p_0}gz\right)$.

10.7 射程 $R=2\sqrt{h(H-h)}$,当 $h=\dfrac{H}{2}$时射程最大.

10.10 (1) $F_x=\left(p_0+\dfrac{1}{2}\rho gh\right)h$,

$$F_z=-\left[p_0(R-\sqrt{R^2-h^2})+\rho gh\left(R-\frac{1}{2}\sqrt{R^2-h^2}\right)\right]+\frac{1}{2}\rho gR^2\arcsin\frac{h}{R}.$$

10.11 $v_r=\dfrac{a^3u_0\cos\theta}{r^3}$, $v_\theta=\dfrac{a^3u_0\sin\theta}{2r^3}$.

10.12 $p=p_\infty-\dfrac{\rho}{2}\cdot\dfrac{R^4\dot{R}^2}{r^4}+\dfrac{\rho}{r}(2\dot{R}^2R+R^2\ddot{R})$.

10.13 $v=\dfrac{h}{2}\sqrt{\dfrac{2g}{l}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{2g}{l}}t\right)$.

10.14 $v=\dfrac{\Delta p}{4\eta l}\left[R_2^2-r^2+\dfrac{R_2^2-R_1^2}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}}\ln\dfrac{r}{R_2}\right]$,

$$Q=\frac{\pi\Delta p}{8\nu l}\left[R_2^4-R_1^4-\frac{(R_2^2-R_1^2)^2}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}}\right].$$

10.15 $v = u\dfrac{\ln\dfrac{r}{R_2}}{\ln\dfrac{R_1}{R_2}}$, $F = \dfrac{2\pi\eta}{\ln\dfrac{R_1}{R_2}}u$.

10.16 流速 $v = \dfrac{\rho g\sin\alpha}{2\eta}z(2h - z)$,压力 $p = p_0 + \rho g\cos\alpha(h - z)$,流量 $Q = \dfrac{\rho g\sin\alpha}{3\nu}h^3$,式中的坐标 z 垂直静止平面.

10.17 阻力矩 $L = 4\pi\eta\dfrac{(\omega_1 - \omega_2)R_1^2R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$.

10.18 $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\eta\left(\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y}\right)^2$.

10.19 $\overline{P} = \dfrac{12\pi^3\eta a}{T^2}A^2$,式中 T 为振动周期.

10.20 水滴将上升.